3. Geometrische Darstellung und Bäcklundtransformation

Die Solitonentheorie ist historisch und inhaltlich mit der klassischen Differentialgeometrie, d.h. mit der Theorie der Kurven und Flächen verbunden. Erstmalig wurde eine Solitonengleichung, nämlich die Sinus-Gordon-Gleichung (SG-Gleichung), in einem differentialgeometrischen Zusammenhang aufgeschrieben. Erst viel später wurde diese differentialgeometrische Entwicklungslinie in der Solitonentheorie wieder aufgegriffen und wesentlich ausgebaut. Ein Vertreter dieser Linie vertritt sogar die provokante These [Sym 1984]:

"Soliton theory is surface theory".

Solitonengleichungen, die in der Physik die besonderen solitären Wellen beschreiben, haben noch eine völlig andere Eigenschaft, die man schwerlich mit Wellen in Verbindung bringen würde: Solitonengleichungen beschreiben Flächen im R^3 mit besonderen Krümmungseigenschaften. Beispiele solcher Eigenschaften sind konstante mittlere Krümmung, konstante Gaußsche Krümmung sowie die Minimalflächeneigenschaft. In der Differentialgeometrie des vergangenen Jahrhunderts wurden diese Arten von Flächen ausführlich untersucht. Es wurden besondere Parametrisierungen angegeben, mit deren Hilfe die Bedingungen für die gegebene Klasse von Flächen durch eine nichtlineare partielle Differentialgleichung ausgedrückt werden konnten. Auf diese Weise wurde die Beschreibung der Klasse von Flächen auf das Studium des Lösungsraumes dieser Gleichung reduziert. Die Geometer der klassischen Differentialgeometrie konnten detaillierte Beschreibungen dieser Flächen geben, auch unter zusätzlichen Annahmen wie z.B. Rotationsflächen. Doch es lag zunächst keine Methode vor, die das systematische Studium des gesamten Lösungsraumes ermöglichte oder jedenfalls eines größeren Teiles davon. Erst mit der Entstehung der Theorie der Bäcklundtransformationen wurde dieses systematische Studium möglich. Hiermit bildet die Theorie der Bäcklundtransformationen einen Vorläufer der Theorie der integrablen Systeme und insbesondere der Solitonentheorie.

Die Bäcklundtransformationen entstanden ursprünglich aus der Idee, durch Anwendung einer geeigneten Flächentransformation auf eine gegebene Fläche mit einer bestimmten Krümmungseigenschaft alle Flächen dieser Klasse zu erhalten, oder, anders betrachtet, aus einer speziellen Lösung der dazugehörigen Gleichung die allgemeine Lösung dieser Gleichung zu erhalten. Die Flächen, für die die erste Bäcklundtransformation gefunden wurde, sind die pseudosphärischen Flächen. Die Erforschung dieser Klasse von Flächen führte in den Sechzigern des vergangenen Jahrhunderts zur Entdeckung der SG-Gleichung. Und die Suche nach Flächentransformationen für diese Klasse von Flächen wiederum führte 1879 zur Entdeckung der *Bianchitransformation*, der *Lietransformation* 1880 und der *Auto-Bäcklundtransformation* der SG-Gleichung 1883. Im Verlauf der Erforschung der Bäcklundtransformationen wurden weitere besondere Eigenschaften der pseudosphärischen Flächen entdeckt. Was die Bäcklundtransformationen betrifft, so spielte in der frühen Periode der Solitonentheorie nur die Auto-Bäcklundtransformation der SG-Gleichung eine Rolle: Deren Entdeckung markiert nicht nur den Beginn der Theorie der Bäcklundtransformationen, sondern mit ihrer Hilfe konnten viel später auch erstmalig exakte Lösungen einer Solitonengleichung studiert werden, insbesondere die teilchenartigen Eigenschaften im Zusammenhang mit der Integrabilität der Gleichung. Dieser Zusammenhang wurde in den fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts von ALFRED SEEGER erkannt, der die SG-Gleichung als ein Modell in der Festkörperphysik betrachtete, sie mit Hilfe der Bäcklundtransformation zu integrieren vermochte und die solitonischen Eigenschaften der Lösungen studierte. Während diese Entdeckungen in der Festkörperphysik in Kapitel 4 beschrieben sind, steht die Geschichte der entsprechenden Entdeckungen der Differentialgeometrie im Mittelpunkt dieses Kapitels.

3.1 Die Entdeckung pseudosphärischer Flächen

Pseudosphärische Flächen sind durch eine konstante negative Gaußsche Krümmung K definiert, d.h.

$$K = k_1 k_2 = -\frac{1}{R_1 R_2} = const < 0 \ .$$

Hierbei sind die Reziproken des kleinsten Krümmungsradius R_1 und größten R_2 in einem Punkt der Fläche die durch EULER so definierten Hauptkrümmungen k_1 und k_2. Bei Flächenpunkten negativer Gaußscher Krümmung weisen die Krümmungsradien in entgegengesetzte Richtungen; sie haben unterschiedliches Vorzeichen.

Lange vor der Entstehung der Theorie der Kurven und Flächen stand eine besondere pseudosphärische Fläche schon im Mittelpunkt mancher Untersuchungen: die Rotationsfläche der Traktrix um ihre Asymptote, die sogenannte *Pseudosphäre*. Deren Meridianlinie, die Traktrix (s. Abb. 3.1, Fig. 18), wurde schon 1676 von ISAAC NEWTON als die Kurve definiert, bei der die Länge der Tangente vom Tangentenpunkt bis zur x-Achse konstant ist [Stillwell 1990]. CHRISTIAN HUYGENS ebenso wie GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ interpretierten 1693 die Traktrix als Spur, die ein Stein zieht, der an einem Seil der Länge a gezogen wird von jemandem, der entlang der x-Achse läuft [Strubecker 1964]. (Daher der Name "Traktrix" von trahere = lat. ziehen.) HUYGENS untersuchte die Rotationsfläche der Traktrix und bestimmte deren Fläche, Inhalt und Schwerpunkt. Sie war ein Paradebeispiel für *pseudosphärische Flächen* und diente auch später immer wieder als Ausgangspunkt bei Untersuchungen zu Flächentransformationen. Ihren Namen bekamen die pseudosphärischen Flächen erst viel später durch EUGENIO BELTRAMI (1835 - 1900). In seiner Abhandlung zur nichteuklidischen Geometrie [Beltrami 1866] stellte er mit diesem Namen ("pseudosferiche") die pseudosphärischen Flächen der Kugel (Sphäre) mit positiver Krümmung *K* gegenüber. BELTRAMI stellte den Zusammenhang zwischen der Differentialgeometrie einerseits und der nichteuklidischen Geometrie LOBA_EVSKIJs und BOLYAIs andererseits her [Dieudonné 1990]. Er war 1866 Hinweisen von GAUSS gefolgt, der in Briefen an SCHUMACHER angeregt hatte, die Verbindung zwischen der Differentialgeometrie der Flächen konstanter Krümmung und der nichteuklidischen Geometrie der Ebene zu suchen [Scholz 1980]. Danach ist in der Pseudophäre eine lokale euklidische Realisierung der nichteuklidischen Ebene zu sehen.

Das Problem der Abwickelbarkeit von Flächen[1] zieht sich wie ein roter Faden durch die differentialgeometrische Entwicklungslinie der Solitonentheorie. Es führte die Mathematiker EDMOND BOUR (1832 - 1866), OSSIAN PIERRE BONNET (1819 - 1892) und ALFRED ENNEPER (1830 - 1885) auf verschiedenen Wegen zur SG-Gleichung und lieferte die Motivation zur Entwicklung der Bianchitransformation, aus der später die Bäcklundtransformation entstand. Die erste systematische Untersuchung zur Abwickelbarkeit von Flächen stellte CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855) an, der sich seit 1816 mit den Problemen der Abwickelbarkeit von Flächen beschäftigt hatte und wohl den größten Beitrag zur Entwicklung der klassischen Differentialgeometrie überhaupt leistete. GAUSS führte den Begriff der inneren Geometrie der Fläche ein und stellte fest, daß alle inneren Eigenschaften und insbesondere die später nach ihm benannte *Gaußsche Krümmung* K der Fläche schon durch die Größen E, F, und G bestimmt sind. GAUSS zeigte ferner, daß die lokalen inneren Eigenschaften einer Fläche durch die Krümmung der Fläche bestimmt sind, sowie daß solche Eigenschaften unter Biegung ohne Verzerrungen der Fläche erhalten bleiben und insbesondere die Krümmung K biegungsinvariant ist [Gauß 1828]. Als "theorema egregium" (exzellentestes Theorem) bezeichnete er sein Ergebnis, daß abwickelbare Flächen die gleiche Gaußsche Krümmung in korrespondierenden Punkten haben.

FERDINAND MINDING (1806 - 1885), der Schüler von GAUSS war, setzte dessen Arbeiten zur Flächentheorie fort. Er untersuchte 1830 Flächen konstanter Gaußscher Krümmung und berechnete u.a. deren Linienelement in geodätischen Polarkoordinaten [Minding 1830a, b]. Im Jahre 1838 stellte er allgemeinere Untersuchungen zu Flächen an, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind [Minding 1838]. Kurz darauf bewies er eine Umkehrung von GAUSS theorema egregium, nämlich daß Flächen, die in korrespondierenden Punkten gleiche Gaußsche Krümmung haben, lokal aufeinander abwickelbar sind [Minding 1839]. Es lag für eine Beispielbetrachtung nahe, die Krümmung K konstant zu wählen. MINDING untersuchte auf diese Weise Flächen konstanter Gaußscher Krümmung, unter ihnen auch einige pseudosphärische Flächen. Zur Bestimmung dieser Flächen integrierte MINDING die später so genannte Monge-Ampèresche Gleichung für Flächen konstanter Gaußscher Krümmung K

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = K\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2 . \tag{3.1}$$

Er grenzte seine Untersuchungen ein, indem er nur Rotationsflächen konstanter Krümmung betrachtete. Für diesen Fall konnte er Gleichung (3.1) in Polarkoordinaten umschreiben:

[1] Bis zu GAUSS "Disquisitiones" von 1828 wurden als "abwickelbar" alle diejenigen Flächen bezeichnet, die ohne Verzerrung in die Ebene ausgebreitet werden können. Erst GAUSS erweiterte den Begriff "abwickelbar" auch auf Paare im Raum gekrümmter Flächen und kam damit zu dem, was heute mit Isometrie beschrieben wird; wobei zu jener Zeit noch nicht zwischen lokal und global unterschieden wurde [Dieudonné 1990].

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}+r\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial \psi \partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2}{r^2\left[1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2\right]} = K \ . \tag{3.2}$$

Die weitere Einschränkung, nur Rotationsflächen konstanter Spindel-Ganghöhe zu betrachten, also

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = const. = h \ ,$$

ließ ihn zu folgendem Integral kommen:

$$dz = h\, d\psi \pm \sqrt{\frac{1}{c^2 - K\, r^2} - 1 - \frac{h^2}{r^2}}\ dr \ . \tag{3.3}$$

MINDING unterschied *Umdrehungsflächen* mit $h = 0$ von *Schraubenflächen* mit $h \neq 0$. Je nach Wert der Konstanten c in Integral (3.3) unterteilte er die *Umdrehungsflächen* konstanter negativer Krümmung nun in drei Typen. Deren Meridianlinie gab er an, also diejenige Kurve, für die $d\psi = 0$, d.h. durch deren Umdrehung längs der z-Achse die Rotationsfläche entsteht:

$$r = c\cosh\phi\,; \quad z = \int \pm\sqrt{1 - c^2\ \sinh^2\ \phi}\ d\phi$$

$$r = c\sinh\phi\,; \quad z = \int \pm\sqrt{1 - c^2\ \cosh^2\ \phi}\ d\phi \tag{3.4a-c}$$

$$r = \frac{1}{\cosh\ \phi}\,; \quad z = \phi - \tanh\ \phi$$

Diese drei Typen wurden später pseudosphärische Flächen des hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Typs genannt [Lilienthal 1903] [Eisenhart 1909]. Im parabolischen Fall ist die Meridiankurve die Traktrix und die Fläche ist die Pseudosphäre (s. Abb. 3.1, Fig. 18).

Nach MINDINGs Arbeiten zu abwickelbaren Flächen verging eine geraume Weile, bis weitere pseudosphärische Flächen untersucht wurden. Im Jahre 1865 stellte ULISSE DINI (1845 - 1918) fest [Dini 1865], daß die Traktrix die Profilkurve einer Schar von pseudosphärischen Schraubenflächen ist [Voss 1903]. Sie entstehen kinematisch gesehen, indem die Traktrix (Abb. 3.1, Fig. 18) um ihre Asymptote gedreht wird und sich dabei längs der Asymptote verschiebt. Die Ganghöhe h ist dabei ein frei wählbarer Parameter.

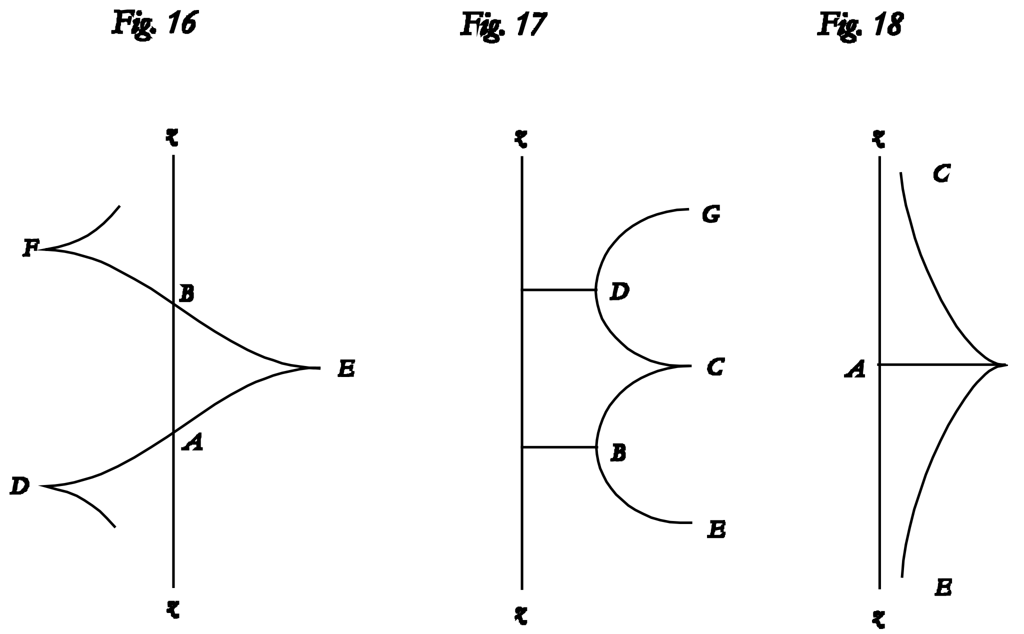

Abbildung 3.1:
Mindings pseudosphärische Flächen. Abbildung aus [Minding 1839]. Fig. 16: Meridiankurve der pseudosphärischen Fläche des elliptischen Typs (Gleichung 3.4b); Fig. 17: Der hyperbolische Typ (Gleichung 3.4a); Fig. 18: Der parabolische Typ (Gleichung 3.4c).

Eine andere Entwicklung, die zur Entdeckung weiterer pseudosphärischer Flächen führte, verlief über die Joachimsthalschen Flächen. FERDINAND JOACHIMSTHAL (1818 - 1861) behandelte 1846 Flächen, deren eine Schar von Hauptkrümmungslinien auf Ebenen liegen, die alle eine gemeinsame Gerade enthalten [Joachimsthal 1846]. Sie tragen heute seinen Namen. ALFRED ENNEPER untersuchte 1868 Joachimsthalsche Flächen konstanter Krümmung [Enneper 1868], die heute Enneperflächen genannt werden. Ennepersche Flächen positiver bzw. negativer Gaußscher Krümmung wurden in den Dissertationen von Ennepers Doktoranden G. BOCKWOLDT und E. LENZ eingehend untersucht [Fischer 1986], [Mel., Ste. 1994]. Zeichnungen verschiedener Enneperflächen stellte [Mel., Ste. 1994] vor. Eine relativ einfache pseudosphärische Fläche, die LENZ übersehen hatte, wurde 1884 von THEODOR KUEN entdeckt [Kuen 1884]. Diese heute sogenannte Kuensche Fläche ist in Abb. 3.2 dargestellt. Eine detaillierte Beschreibung der Kuenschen, sowie der Dinischen Fläche und der Pseudosphäre mit Fotos und weiteren Zeichnungen ist in [Fischer 1986] zu finden.

Das Interesse an der Geometrie von besonderen Flächen, und damit an der Gestalt der pseudosphärischen Flächen, erlosch im wesentlichen innerhalb der Differentialgeometrie um die Jahrhundertwende. In der Mathematik rückten allgemeinere und abstraktere Gesichtspunkte in den Vordergrund [Fischer 1986]. Bildhaft für diese Entwicklung stellt sich der Bau von Modellen besonders interessanter Flächen dar, der im letzten Drittel des vergangenen Jahrhunderts seinen Höhepunkt erlebte und nach dem 1. Weltkrieg ganz zum erliegen kam. Was die pseudosphärischen Flächen betrifft, so mag HILBERTS Beweis, daß Flächen mit $K = -1$ nie vollständig im R^3 sind, sie also dort immer Singularitäten zeigen [Hilbert 1901], mit ein Grund für das nachlassende Interesse an ihnen sein. In der durch FRIEDMANN und LEMAITRE begründeten Standardkosmologie ist der physikalische Raum von konstanter Krümmung. Diese

Kosmologie setzte sich aber erst in den 30er und 40er Jahren durch und motivierte in der Folge die erneute Beschäftigung mit der nichteuklidischen Geometrie.

3.2 Die Sinus-Gordon-Gleichung als Gleichung für pseudosphärische Flächen

Mit MINDINGs Betrachtungen 1839 waren pseudosphärische Flächen zum ersten Mal ausführlich diskutiert worden. Die Formen, die er für die pseudosphärischen Flächen angab, entsprechen jedoch keinen Solitonenlösungen, da Gleichung (3.2) keine Solitonengleichung ist. Die Wahl der Parameterlinien, die zur Beschreibung der Fläche gewählt werden, entscheidet über das Aussehen der Gleichung für die Fläche. MINDINGs Wahl der Geodätischen als Parameterlinien $\psi = \text{const.}$ und geodätisch parallelen Kurven als Parameterlinien $\varphi = \text{const.}$ führen zu keiner Solitonengleichung. Zu einer Solitonengleichung, nämlich der SG-Gleichung, führt erst die Wahl der Hauptkrümmungslinien oder der Asymptotenlinien als Parameterlinien der pseudosphärischen Fläche. Die Hauptkrümmungslinien einer Fläche verlaufen in jedem Punkt per definitionem in den Richtungen größter bzw. kleinster Krümmung. Sie stehen stets senkrecht aufeinander. In den Asymptotenrichtungen verschwindet, per definitionem, die 2. Fundamentalform. Die Asymptotenlinien folgen den Asymptotenrichtungen. Sie bilden auf einer Fläche konstanter Gaußscher Krümmung ein sogenanntes "Tschebyschevsches Netz". Die erste Fundamentalform wird ihnen angepaßt zu

$$ds^2 = du^2 - 2\cos\Phi \, du \, dv + dv^2 \ ,$$

d.h. $E = G = 1,\ F = -\cos\Phi$, Φ = Winkel zwischen den Asymptotenlinien. Eingesetzt in die Gaußsche Gleichung für die Krümmung:

$$K = \frac{1}{2W}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{EW}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{W}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{W}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{W}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EW}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right]$$

$$mit \ W = \sqrt{EG - F^2} \ ,$$

ergibt sich damit die SG-Gleichung mit den beiden Scharen der Asymptotenlinien u = const. und v = const. als Parameterlinien:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u \, \partial v} = \sin\Phi \ . \qquad (3.5a)$$

Der italienische Mathematiker LUIGI BIANCHI (1856 - 1929) nannte die SG-Gleichung *Fundamentalgleichung* für Flächen konstanter negativer Krümmung [Bianchi 1910]. Bei der Wahl der Hauptkrümmungslinien als Parameterlinien mit φ = halber Winkel zwischen den Asymptotenlinien, also $2\varphi = \Phi$, wird die erste Fundamentalform zu

$$ds^2 = \cos^2\phi \, d\tilde{u}^2 + \sin^2\phi \, d\tilde{v}^2$$

und die aus der Gaußschen Gleichung resultierende Form der SG-Gleichung ist

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\tilde{u}^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial\tilde{v}^2} = \sin\phi \, \cos\phi \qquad \text{bzw.}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{u}^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{v}^2} = \sin\Phi \, . \tag{3.5b}$$

Die Parameter zu den Hauptkrümmungslinien (getildete Variablen) und zu den Asymptotenlinien (ungetildete Variablen) sind leicht ineinander transformierbar:

$$u = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}),$$

$$v = \frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v}). \tag{3.6}$$

Verschiedene Solitonenlösungen der SG-Gleichung beschreiben, bei geeigneter Darstellung, verschiedene pseudosphärische Flächen. In der einfachsten von ihnen, der Pseudosphäre, findet man die Ein-Solitonenlösung der SG-Gleichung für _ = const. wieder:

$$\Phi = 4 \, \text{arc tan} \, e^{\tilde{v}} \, . \tag{3.7}$$

Lösung (3.7) zeigt den Verlauf der sogenannten stationären *Versetzungslösung* oder *kink solution* der SG-Gleichung (s. Kapitel 4, Abb. 4.5). Wird die Bedingung _ = konst. fallengelassen, so beschreibt die Lösung

$$\Phi = 4 \, \text{arc tan} \, e^{\tilde{v} - h\tilde{u}}$$

die Dinifläche, also die Schraubenfläche der Pseudosphäre, mit der Ganghöhe *h*. Die Kuensche Fläche ist ein Abbild der Zwei-Solitonenlösung der SG-Gleichung.

Die Wahl der Parameterlinien entscheidet, wie gesagt, über das Aussehen der charakteristischen Gleichung einer Fläche und auch darüber, ob die Gleichung eine Solitonengleichung ist oder nicht. Bei der Wahl völlig anderer, nicht so leicht in die Asymptotenlinien transformierbarer Koordinatenlinien können sich andere Solitonengleichungen ergeben. Nach [Popov 1993] führt der Ansatz

$$ds^2 = \eta^2 \, dx^2 + \left(\eta^2 u^2 + \eta^4\right) dx \, dt + \left[\eta^2 u_x^2 + \left(\frac{\eta u^2}{2} + \eta^3\right)^2\right] dt^2 \;, \eta = const.$$

zur modifizierten KdV-Gleichung als charakteristische Gleichung für pseudosphärische Flächen:

$$u_t = \frac{3}{2}u^2 u_x + u_{xxx} \ .$$

Der alternative Ansatz

$$\begin{aligned} ds^2 &= [(1-u)^2 + \eta^2]\, dx^2 + \\ &+ [(1-u)(-u_{xx} + \eta u_x - \eta^2 u - 2u^2 + \eta^2 + 2u) + \eta(\eta^3 + 2\eta u - 2u_x)]dxdt + \\ &+ [(-u_{xx} + \eta u_x - \eta^2 u - 2u^2 + \eta^2 + 2u)^2 + (\eta^3 + 2\eta u - 2u_x)^2]\, dt^2 , \ \eta = const. \end{aligned}$$

führt laut derselben Quelle zur KdV-Gleichung:

$$u_t = 6\ uu_x + u_{xxx} \ .$$

Durch besondere Wahl des Linienelements ds können auch nichtsolitonische partielle Differentialgleichungen als charakteristische Gleichung für pseudosphärische Flächen erzeugt werden, z.B. die Burgers-Gleichung oder die Liouvillegleichung. Das Auftauchen anderer *Solitonengleichungen* als der SG-Gleichung in der klassischen Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im Kontext mit pseudosphärischen Flächen ist mir allerdings nicht bekannt.

Die Hauptkrümmungslinien oder die Asymptotenlinien (sie werden in der Literatur jener Zeit als Haupttangentenkurven, später auch als Schmiegetangentenkurven bezeichnet) zählen zu den Kurvenscharen, die meist erst nach den geodätischen Linien untersucht wurden. Wie die Hauptkrümmungslinien sind die Asymptotenlinien Objekte der "äußeren" oder "extrinsischen" Geometrie. Das heißt, daß sie empfindlich auf (längentreue) Verbiegung der Fläche reagieren. Es ist daher nicht verwunderlich, daß im Zusammenhang mit der Abwickelbarkeit (Verbiegung) von Flächen andere Parameterlinien bevorzugt wurden. Und Flächen konstanter Krümmung fanden eben besonders bei Untersuchungen zur Abwickelbarkeit von Flächen Verwendung. Eine Vielzahl von Gleichungen wurde so im Zusammenhang mit Flächen konstanter Krümmung in der klassischen Differentialgeometrie behandelt. Eine Übersicht über die Geometrie von Solitonengleichungen geben [Mel., Ste. 1994] und [Bobenko 1994]. Hierbei wurden auch andere als pseudosphärische Flächen untersucht, die Solitonenlösungen wiedergeben, wie z.B. Flächen, die BIANCHI untersuchte [Bianchi 1910] und die heute als "Multibubbletons" bekannt sind [Mel., Ste. 1994].

Dabei wurden auch Solitonengleichungen gefunden, freilich ohne diese als solche zu erkennen. So betrachtete z.B. JULIUS WEINGARTEN (1836 -1910) 1863 die auf eine Kugel abwickelbaren Flächen, also Flächen mit konstanter *positiver* Krümmung [Weingarten 1863][2] und setzte die erste Fundamentalform so an:

$$ds^2 = du^2 + (e^\theta + e^{-\theta})\, du\, dv + dv^2 \ .$$

Auf obigem Wege über die Gaußsche Gleichung für die Krümmung gelangte er zu der

[2] WEINGARTENs Untersuchungen in dieser bekannten Arbeit führen zu den Weingartenschen Flächen oder W-Flächen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß ein Hauptkrümmungsradius eine Funktion des anderen ist: $R_1 = f(R_2)$.

integrablen hyperbolischen Sinh-Gordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = \sinh \Phi \,, \tag{3.8}$$

die nach [Beutler 1993] Solitonenlösungen besitzt. Gleichung (3.8) trug allerdings im Verlauf der frühen Periode der Solitonentheorie nicht zu der Entwicklung der Solitonentheorie bei. Daher sollen hier nur die Arbeiten weiter verfolgt werden, die sich mit pseudosphärischen Flächen, der SG-Gleichung und deren Transformationen beschäftigten.

Ein offenes Problem war, wie alle auf eine gegebene Fläche abwickelbaren Flächen gefunden werden konnten. Dieses Problem wird heute nach BOUR benannt, da EDMOND BOUR (1832 - 1866) in dieser Frage mit seiner Arbeit "Théorie de la déformation des surfaces" [Bour 1862a] einen ersten Fortschritt erzielte. Was diese Arbeit für die Geschichte der Solitonentheorie bedeutend macht ist, daß ihr der Ruhm der Priorität an der SG-Gleichung zukommt: Die SG-Gleichung erschien erstmalig explizit in dieser Arbeit von BOUR im Jahre 1862. Wobei zu bemerken ist, daß die SG-Gleichung von BOUR nicht im Zusammenhang mit pseudosphärischen Flächen gesehen wurde. Im Jahre 1860 stellte die Pariser Akademie die Preisaufgabe, Flächen zu finden und in einer einfachen Weise anzugeben, die auf eine gegebene Fläche abwickelbar sind. Den ersten Preis gewann BOUR mit der oben erwähnten Arbeit sowie ihrer Fortsetzung [Bour 1862b]. Es sind dies BOURs einzigen großen Arbeiten zur Differentialgeometrie. Ein dritter Teil war zwar geplant, doch Bour starb schon 1866 im Alter von nur 33 Jahren. Diese beiden Arbeiten BOURs wurden von Zeitgenossen außerordentlich geschätzt [Reich 1973]. Sie zeigen, daß jede auf eine gegebene Fläche abwickelbare Fläche (lokal) einer Monge-Ampèreschen Gleichung genügt [Dieudonné 1990]. Und sie enthalten die später sogenannten Mainardi-Codazzi-Gleichungen für den speziellen Fall, daß die Parameterlinien die geodätischen Linien sind.

Im seiner "Théorie de la déformation des surfaces" [Bour 1862a], dem ersten Teil der Preisarbeit, entwickelte BOUR verschiedene Wege, alle auf eine gegebene Fläche abwickelbaren Flächen zu finden. Der erste und rein analytische Weg führt durch den Gebrauch symmetrischer Koordinaten zu einer Differentialgleichung, deren Integration BOUR in einer früheren Arbeit geleistet hatte [Bour 1857]. Auf dem zweiten Weg erhielt BOUR mit Hilfe geodätischer Linien und zugehörigen "Perpendikularen" als Parameterlinien eine Reihe sekundärer Gleichungen, die BOUR "Fundamentalgleichungen" nannte, und aus denen sich, nach BOURs Meinung, die ganze Theorie der Flächen ergab. BOUR wandte diese Gleichungen direkt auf das gestellte Problem an und bestimmte so die auf Rotationsellipsoide, Hyperboloide und Schraubenflächen abwickelbaren Regelflächen. Weiterhin folgerte BOUR, daß alle Schraubenflächen auf jeweils eine Rotationsfläche abwickelbar sind.

Eine der dabei auftretenden Fundamentalgleichungen beinhaltet die SG-Gleichung. Diese Fundamentalgleichung führte BOUR wie folgt ein [Bour 1862a, S. 120]:

> "Auparavant, pour terminer ce chapitre, j´indiquerai rapidement une forme nouvelle et curieuse, que l´on peut donner à l´équation différentielle des surfaces applicables sur les surfaces de révolution. J´ai cru devoir donner cette équation à cause de sa simplicité, et de la facilité avec laquelle elle s´établit au moyen des équations fondamentales; je l´ai reléguée ici, parce que cette forme n´ést point celle qui m´a servi dans les applications, soit géométriques, soit analytiques."
>
> (Zuvor, um das Kapitel abzuschließen, gebe ich schnell eine neue und erstaunliche Form an,

die man zu den Differentialgleichungen der auf die Rotationsflächen abwickelbaren Flächen hinzurechnen kann. Ich habe geglaubt, diese Gleichung wegen ihrer Einfachheit angeben zu müssen, und weil sie sich leicht in die Fundamentalgleichungen einfügt. Ich habe sie hierher verbannt, weil diese Form mir nicht bei den Anwendungen geholfen hat, weder bei den geometrischen noch bei den analytischen.)

Die Fundamentalgleichung nimmt die einfache Gestalt an

$$Z_1 = \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \tag{3.9}$$

und ist ein Ausdruck für die geodätische Krümmung Z_1 (heutige Bezeichnung k_g) der zu den

$$d\zeta = -\frac{1}{G^2(u)} du ,$$

$$d\zeta_1 = -\sqrt{G(u)} \frac{d^2 \sqrt{G(u)}}{du^2} du . \tag{3.10a,b}$$

geodätischen u-Linien (v = const.) senkrechten *v-Linien* (u = const.) einer auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Fläche. Die Gleichungen für die abhängigen Variablen ζ_1 und ζ in Abhängigkeit von dem Parameter u lauten bei BOUR[3]

Was die unabhängige Variable η in Gleichung (3.9) angeht, so zeigte BOUR nur, daß sie existiert, ohne weiter auf ihre Eigenschaften (Charakterisierung der Kurven η = const.) einzugehen. BOURs bevorzugtes Anwendungsbeispiel für seine Gleichungen ist in seiner ganzen Arbeit das Katenoid, also die Rotationsfläche der Kettenlinie. Für das Katenoid lautet die 1. Fundamental-form mit u,v = geodätische Polarkoordinaten:

$$ds^2 = du^2 + (1+u^2)\, dv^2 , \tag{3.11}$$

also $E = 1$, $F = 0$ und $G(u) = (1+u^2)$. Die geodätische Krümmung der v-Linien ist bei orthogonalen Flächenparametern u,v gegeben durch

$$k_g = -\frac{1}{2\ G\ \sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial u}.$$

Und für die geodätische Krümmung der v-Linien des Katenoids folgt mit Gleichung (3.11)

$$k_g = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{u}{1+u^2} . \tag{3.12}$$

[3] Gleichung (3.10a) ist nicht zu verwechseln mit der Transformation von dem geodätischen Parameter u auf einen isothermen Parameter:

$$d\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{G(u)}} du$$

Aus der von BOUR durchgeführten Umparametrisierung (Gleichung 3.10a) folgt

$$\zeta = -\int \frac{du}{1+u^2} = -\arctan u + c \ ,$$

mit c = Integrationskonstante (o.B.d.A. = 0). Daraus ergibt sich für die geodätische Krümmung der v-Linien des Katenoids (Gleichung 3.12)

$$k_g = -\sin\zeta\cos\zeta \ .$$

Da ferner aus den Gleichungen (3.10a,b) für das Katenoid mit $G = (1+u^2)$ folgt $\zeta_1 = \zeta$, erhielt BOUR aus seiner Fundamentalgleichung (3.9) in der Anwendung auf das Katenoid die SG-Gleichung

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} - \frac{d^2\zeta}{dv^2} = -\sin\zeta\cos\zeta \ . \qquad (3.13)$$

Sie ergibt sich aus der geodätischen Krümmung für den Fall, daß die Fundamentalform (3.11) Gültigkeit besitzt und unter Anwendung der abhängigen Variablen ζ aus Gleichung (3.10a) und den speziellen Parametern η und v.

Es stellt sich die Frage, wozu BOUR die speziellen Parameter η und v und die Variable ζ einführte. Die Antwort lieferte BOUR selber in dem oben zitierten Absatz: Auf diesem Wege ergibt sich eine einfache Gleichung (Gleichung 3.9) für die geodätische Krümmung. Weitere Anwendungen fand BOUR für diese Fundamentalgleichung, deren Spezialfall die SG-Gleichung ist, nicht. Um so erstaunlicher ist es, daß BOUR ohne großes Federlesen ("... on trouve aisément l´integrale particulière ...") eine exakte Lösung der SG-Gleichung angab und zwar für die SG-Gleichung in beiden heute gebräuchlichen Formen. Die Lösung der Form (3.13) gab er an mit

$$\sin\zeta = \sin \mathrm{am} \frac{\mathrm{m}\eta + \mathrm{nv} + 1}{\mathrm{k}} \qquad \text{mit } \mathrm{n}^2 - \mathrm{m}^2 = 1 ,$$

wobei k das Modul der elliptische Funktion sinus amplitudinis ist; m, n, l und k sind Konstanten von denen drei frei gewählt werden können. Des weiteren lieferte BOUR die durch die einfache Parametertransformation (3.8) erhältliche Form der SG-Gleichung

$$\tilde{\zeta} = am \frac{m\tilde{\eta} + n\tilde{v} + l}{k} \qquad mit\ n\ m = 1 .$$

mitsamt einer exakten Lösung

$$\frac{d^2\zeta}{d\tilde{\eta}\, d\tilde{v}} = -\sin\zeta\cos\zeta$$

Mit diesen Lösungen schloß BOUR das lange Kapitel seiner Arbeit, in dem er sich mittels der Fundamentalgleichungen um die Darstellung der auf eine gegebene Fläche abwickelbaren

Flächen bemühte. Die Gleichung (3.9) oder die SG-Gleichung finden im weiteren Verlauf seiner Arbeit keine Erwähnung mehr.

Den zweiten Preis der Pariser Akademie für das Auffinden der auf eine gegebene Fläche abwickelbaren Flächen erhielt DELFINO CODAZZI (1824 - 1873), der die Mainardi-Codazzi-Gleichungen in etwas allgemeinerer Form darstellte. Und den dritten Preis erhielt OSSIAN PIERRE BONNET (1819 - 1892) mit der Arbeit "Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée" [Bonnet 1865], die vor allem den heute sogenannten Gauß-Bonnetschen Satz enthält. In der Fortsetzung seiner Preisarbeit [Bonnet 1867] bewies BONNET das heute als Fundamentalsatz der Flächentheorie (oder *Bonnet-Theorem*) bezeichnete Theorem, wonach die sechs vorgegebenen Funktionen der ersten und zweiten Fundamentalform eine Fläche bis auf ihre Lage im Raum vollständig beschreiben[4]. BONNETs Arbeit von 1867 enthält ebenfalls die SG-Gleichung und zwar zum ersten Mal in dem heute bekannten Zusammenhang mit pseudosphärischen Flächen. BONNET untersuchte die Eigenschaften zweier Flächen, deren Hauptkrümmungslinien durch eine einfache Transformation ineinander übergehen. Die Bestimmung dieser Flächen hing von der Integration u.a. der SG-Gleichung ab, wie BONNET bemerkte, die jedoch "jenseits der Möglichkeiten der derzeitigen Analyse" lag. Er bemerkte [Bonnet 1867, S. 70]:

> "Cette integration est au-dessus des forces de l´Analyse actuelle, mais on peut, sans l´effectuer, parvenir à une définition géométrique simple des surfaces dont il s´agit."
> (Diese Integration liegt jenseits der Möglichkeiten der derzeitigen Analyse, aber man kann auch ohne das zu bewerkstelligen zu einer einfachen geometrischen Definition jener Flächen, um die es sich handelt, kommen.)

BONNET zeigte im folgenden dann mit einigen Rechnungen, daß die Flächen, auf denen die transformierten Krümmungslinien liegen auf eine "imaginäre Kugel" (sphère imaginaire) abwickelbar sind, womit er die Flächen konstanter negativer Gaußscher Krümmung meinte. Interessanterweise taucht hier der Name "sphère imaginaire" auf, ein Jahr nachdem BELTRAMI den Namen "pseudosferiche" prägte [Beltrami 1866]. BELTRAMIs Begriff "pseudosphärische Flächen" setzte sich gegen den aus BONNETs Namen ableitbaren Begriff "imaginärsphärische Flächen" durch.

Eine dritte Erwähnung der SG-Gleichung kurz nach BOUR und BONNET sollte nicht unberücksichtigt bleiben. Der Göttinger Mathematikprofessor ALFRED ENNEPER (1830 - 1885) bearbeitete in den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts intensiv die Flächentheorie. Im fünften Teil einer Reihe von Abhandlungen ("Analytisch-geometrische Untersuchungen") [Enneper 1868] betrachtete er ausführlich Flächen konstanter Krümmung und leitete für diese "fundamentale Gleichungen" ab, wie er sie nannte, darunter auch die SG-Gleichung. Ob ihm die Arbeit BOURs oder sogar schon BONNETs Arbeit bekannt war, ist ungewiß; Erwähnung finden sie bei ENNEPER nicht. Diese und eine weitere Arbeit ENNEPERs [Enneper 1870] galten bis vor kurzem als die ersten, in denen die SG-Gleichung Erwähnung fand. Das belegen Äußerungen in z.T. vielzitierten Arbeiten [Mel., Ste. 1993], [Seeger 1980a, 1983, 1985, 1993], [Ogurtani 1983], [MNS 1991], [Seg., Wes. 1981], [Beutler 1993]. Daher war in den fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts von ALFRED SEEGER vorgeschlagen worden, die SG-Gleichung "Ennepergleichung" zu nennen, ein Name, der in der deutschsprachigen Literatur zur

[4] Ein den heutigen Exaktheitsvorstellungen gerecht werdender Beweis dieses Satzes gelang zuerst KARL PETERSON (1828 - 1881) in seiner Kandidatenschrift (Doktorarbeit) aus Dorpat in Estland (heute Tartu) im Jahre 1853 [Reich 1973].

Solitonentheorie noch bis heute zu finden ist [Seeger 1983, 1985], [See., Wes. 1981], [MNS 1991], [Beutler 1993]. Hinweise auf die Arbeit von BONNET von 1867 im Zusammenhang mit der SG-Gleichung lieferte NEIL IBRAGIMOV in seinem Buch [Ibragimov 1983], S. 222, der die Bezeichnung "Bonnet-Gleichung" für die SG-Gleichung verwendete. IBRAGIMOV berief sich auf eine Arbeit SOPHUS LIEs [Lie 1881], der auf die SG-Gleichung in BONNETs Arbeit hinwies, und zitierte BONNET nicht direkt. Die Arbeit von BOUR wurde allerdings bisher übersehen. In einer Kurzmitteilung habe ich darauf hingewiesen [Heyerhoff 1995].

Kurz soll auch auf die SG-Gleichung in ENNEPERS Arbeiten eingegangen werden. ENNEPERs Ziel war es, für Flächen konstanter Krümmung allgemeine Gleichungen abzuleiten [Enneper 1868, S. 258]. Und er bemerkte:

> "Die unüberwindlichen Schwierigkeiten, welche sich bei der Aufsuchung aller Flächen von constantem Krümmungsmaass entgegenstellen, führen von selbst darauf, besondere Fälle zu betrachten und die Fläche noch durch eine zweite geometrische Eigenschaft näher zu bestimmen, wobei dann die Wahl der Curvensysteme nicht gleichgültig ist."

ENNEPER stellte sich daher die Frage:

> "Für welche Flächen von constantem Krümmungsmaass ist ein System von Krümmungslinien plan oder sphärisch?"

Diese Frage führt zu Joachimsthalschen Flächen konstanter Krümmung, die heute Ennepersche Flächen genannt werden (s.o.). Für Flächen dieser Art mit negativer konstanter Krümmung kam ENNEPER direkt auf die SG-Gleichung, allerdings in dieser etwas ungewohnten Form:

$$\frac{d^2 \arctan t}{d\tilde{v}^2} - \frac{d^2 \arctan t}{d\tilde{u}^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{1}{2K^2} \; .$$

Diese Gleichung entspricht der SG-Gleichung, lediglich wurde anstatt des Φ in Gleichung (3.5b), womit wieder der Winkel zwischen den Asymptotenlinien bezeichnet ist, von ENNEPER "arctan t" gewählt. Es sei angemerkt, daß bei der Substitution

$$t = \tan\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sin\Phi}{\cos\Phi} \; ; \qquad \phi = \frac{\Phi}{2}$$

Ennepers Gleichung zur SG-Gleichung wird.

Die Hauptkrümmungslinien der pseudosphärischen Flächen erfüllten ENNEPERs Bedingungen und brachten ihn seinem Ziel näher, grundlegende Gleichungen für Flächen negativer konstanter Krümmung zu finden. Allerdings schien ENNEPER mit der SG-Gleichung nicht zufrieden zu sein, weil ihm ihre allgemeine Integration nicht möglich war, wie er bemerkte. Daher ging er im weiteren Verlauf nicht mehr in nennenswerter Weise auf sie ein. Zwei Jahre später erwähnt ENNEPER sie in der Form (3.5a) noch einmal [Enneper 1870] und stellte fest, daß jedem Integral der Gleichung nur eine Fläche entspricht.

Die bekannteste Erwähnung der SG-Gleichung in der klassischen Differentialgeometrie stammt von P. L. TSCHEBYSCHEV aus dem Jahre 1878 [Tschebyschev 1878]. Ihr, oder sogar noch späteren Arbeiten anderer Mathematiker, wird bis heute noch verschiedentlich die Priorität an der SG-Gleichung zugesprochen [Popov 1993], [McLachlan 1994]. TSCHEBYSCHEV führte in seinem Beitrag das heute nach ihm benannte Tschebyschevsche Netz ein. In ihm sind in einem Viereck, das aus Kurven der beiden Scharen der Parameterlinien auf einer Fläche gebildet wird, die jeweils gegenüberliegenden Seiten gleich lang. Der originelle Beitrag des bekannten russischen Mathematikers bestand darin, anzugeben, wie ein gewebter Stoff, der eine eng anliegende Hülle für einen Gegenstand beliebiger Form bilden soll, zuzuschneiden ist. Dabei bediente sich TSCHEBYSCHEV folgenden Tricks: In jedem Punkt des an dem Gegenstand anliegenden Stoffes kreuzen sich zwei, als unelastisch angenommene, Fäden in einem Winkel Φ zwischen 0° und 180°. Fährt man mit dem Finger entlang eines Fadens, so variiert dieser Winkel unter Umständen. Der Stoff ist nun dort zu schneiden, wo Φ das Intervall [0°, 180°] verläßt. TSCHEBYSCHEV zeigte, daß Φ der Gleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u\,\partial v} = - K \sin\Phi$$

gehorcht, wobei K die Gaußsche Krümmung des entsprechenden Punktes der Oberfläche des zu umhüllenden Gegenstandes ist. Im Falle der pseudosphärischen Flächen bilden die asymptotischen Linien gerade ein TSCHEBYSCHEVsches "Stoffnetz".

3.3 Die Bianchi- und die Lietransformation

Nachdem MINDING 1839 gezeigt hatte, daß sich zwei Flächen konstanter Gaußscher Krümmung auf unendlich viele Arten aufeinander abwickeln lassen, bewies BONNET 1867, daß jede Fläche konstanter Gaußscher Krümmung auf ∞^1 viele Flächen gleicher Krümmung abgewickelt (oder verbogen) werden kann [Lie 1880a]. Damit war gezeigt, daß es mindestens ∞^1 verschiedene pseudosphärische Flächen gleicher Krümmung gab und somit ∞^1 Lösungen der SG-Gleichung. Die Integration der SG-Gleichung und damit die Bestimmung der Raumformen aller pseudosphärischen Flächen mittels der allgemeinen Lösung der SG-Gleichung gelang jedoch zunächst nicht [Lilienthal 1903]. Schließlich gelang eine Integration der SG-Gleichung vermöge der Bäcklundtransformation. Verfolgt man die Entstehungsgeschichte der Bäcklundtransformation, so fällt auf, daß sie durch das Zusammentreffen zweier zunächst unabhängiger "Strömungen" entstand: einer geometrischen und einer analytischen. In Frankreich und Italien entwickelte sich in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts die Idee der Flächentransformation anhand rein geometrischer Überlegungen. Zu erwähnen sind hier ALBERT RIBAUCOUR (1842 - 1893) und LUIGI BIANCHI (1856 - 1929). Auf der anderen Seite entwickelten in Norwegen und Schweden in der gleichen Zeit SOPHUS LIE (1842 - 1899) und ALBERT VICTOR BÄCKLUND (1845 - 1922) Erweiterungen von LIEs Theorie der Kontakttransformationen erster Ordnung und ihre Anwendungen auf Differentialgleichungen. Die Veröffentlichung von BIANCHIs Flächentransformation schließlich brachte die Synthese der beiden Strömungen, indem LIE und BÄCKLUND die Bianchische Transformation in ihre Gedanken einbeziehen konnten und BÄCKLUND aus ihr seine eigene Transformation entwickelte. Die grundlegende Idee, daß die Anwendung von Kontakttransformationen höherer Ordnung auf Differentialgleichungen möglich und erfolgversprechend sei, stammte von LIE, der sie 1874 als zwei Fragen formulierte [Lie 1874]. Direkt darauf wurde die Verallgemeinerung von BÄCKLUND realisiert, der Kontakttransformationen höherer Ordnung behandelte [Bäcklund 1874 und 1876]. Eine genaue Beschreibung dieser Abhandlungen findet sich in [And., Ibr.

1979].

Einige Jahre vor der Entstehung dieser Ideen der beiden Skandinavier gelang es RIBAUCOUR mittels rein geometrischer Überlegungen zu zeigen, daß es eine Konstruktion gibt, die eine pseudosphärische Fläche in eine andere überführt [Ribaucour 1870]. In der Übersetzung von [Lie, Bd. III S.733] lauten RIBAUCOURs Gedanken:

> "Hat man eine Fläche von der konstanten Krümmung $-1/a^2$ und beschreibt man um jeden ihrer Punkte in der zugehörigen Tangentialebene einen Kreis von konstantem Halbmesser, so werden diese Kreise von ∞^1 Flächen orthogonal geschnitten, und zwar haben diese ∞^1 Flächen wieder die konstante Krümmung $-1/a^2$ und gehören einem dreifach orthogonalen System an. Auffallend ist es, daß Ribaucour sagt, der Halbmesser der Kreise sei gleich der Krümmung der Ausgangsfläche, während er doch gleich a gewählt werden muß."

Damit war deutlich geworden, daß ein Weg zur Bestimmung der allgemeinen Form von pseudosphärischen Flächen darin lag, bekannte Flächen durch Transformationsmethoden in andere zu überführen und damit von speziellen Lösungen der SG-Gleichung zur allgemeinen zu gelangen. LUIGI BIANCHI sagte 1910 hierzu [Bianchi 1910, S. 456]:

> "Die wichtigsten Fortschritte in der Theorie der Flächen konstanter Krümmung sind mittels Transformationsmethoden erzielt worden, die es ermöglichen, aus einer bekannten Fläche konstanter Krümmung unendlich viele neue Flächen derselben Art abzuleiten, und zwar durch einfache algebraische Operationen und Differentiationen."

BIANCHI veröffentlichte 1879 in seiner "Tesi di abilitazione" eine Flächentransformation, die, wenn nicht gleich der RIBAUCOURschen, ihr doch sehr ähnlich ist. Sie überführt eine bekannte pseudosphärische Fläche in ∞^1 viele neue [Bianchi 1879]. Er nannte sie *Komplementärtransformation*, weil in ihrer geometrischen Interpretation die Transformierte und die Ausgangsfläche die beiden Mäntel der Evolute einer dritten Fläche sind. BIANCHI beschrieb die geometrischen Gedanken seiner Transformation etwas anders als RIBAUCOUR [Bianchi 1880, S.577]:

> "Man betrachte auf einer Fläche von constanter negativer Krümmung $-1/R^2$ ein System von parallelen geodätischen Linien und trage auf jeder Tangente dieser Linien vom Berührungspunkte aus die constante Strecke R ab. Der Ort der Endpunkte dieser Strecken ist mit derselben constanten Krümmung $-1/R^2$ behaftet."

D.h., daß jedem Punkt der gegebenen Fläche je ein Punkt auf der transformierten Fläche zugeordnet ist, und daß die Tangentialebenen entsprechender Punkte senkrecht aufeinander stehen. Damit war eine Methode gefunden, aus einer bekannten pseudosphärischen Fläche auf festgelegtem Wege eine neue zu finden. Durch unendlichfache Anwendung der BIANCHIschen Transformation konnten ∞^1 neue pseudosphärische Flächen gefunden werden.
BIANCHIs Transformation wurde sofort von LIE aufgegriffen. LIE war es, der sie zuerst erläuterte und in einer Reihe von Publikationen analysierte [Lie 1880 b-d]. Mit ihrer Erweiterung durch die Auto-Bäcklundtransformation der SG-Gleichung erlangte die BIANCHIsche Transformation ihre heutige Bekanntheit. Im Jahre 1881 erfuhr LIE von der Arbeit RIBAUCOURS, der LIE die Priorität an der heute sogenannten *Bianchitransformation* einräumte. Im Dezember 1881 schrieb LIE an FELIX KLEIN, mit dem er einen regen Briefkontakt, vor allem über seine mathematischen Überlegungen, unterhielt [Lie, Bd. III S. 733]:

> "Ich habe eben einen interessanten Brief von Ribaucour, der eben eine große Arbeit über Minimalfl. produziert. ... Ribaucour schickt Dir einen freundlichen Gruß durch mich. Er ist Ingenieur und hat wenig Zeit zu der Mathematik, in der er nichtsdestoweniger sehr originelle

Sachen produziert hat. Unter anderm hat er längst den Satz von Bianchi über Fl. konst. Kr., der mir so nützlich gewesen ist, in den Comptes Rendus publiziert, ohne indeß, wie ich glaube, auf seine Tragweite zu insistieren."

Hätte LIE vor 1880 von RIBAUCOURs Transformation erfahren, hätte er ihr evtl. mehr Geltung verschafft. So allerdings war es BIANCHIs Transformation, die er bekannt machte und zu deren Bedeutung er bemerkte [Lie 1880b, S.282]:

"... Hieraus folgt, daß die successive Ausführung von Bianchis Operation zur Bestimmung von Flächen konstanter Krümmung ... nur eine Reihe Quadraturen verlangt. Hierdurch erhält die schon von Bianchi gestellte Frage, ob man durch successive Ausführung seiner Operation aus der Pseudosphäre ... jede andere derartige Fläche herleiten kann, eine fundamentale Wichtigkeit für die Theorie dieser Flächen."

BIANCHI selber hatte 1879 keine analytische Form seiner Transformation angegeben. 1880 wurde jedoch von LIE eine Form angegeben [Lie 1880b], die BIANCHIs geometrischer Darstellung entsprach:

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = \frac{1}{K}$$

$$(x' - x)\frac{dz}{dx} + (y' - y)\frac{dz}{dy} - (z' - z) = 0$$

$$(x' - x)\frac{dz}{dx'} + (y' - y)\frac{dz}{dy'} - (z' - z) = 0$$

$$1 + \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dx'} + \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dy'} = 0$$

Die erste Gleichung sagt aus, wie ROELCKE in [Roelcke 1907] zusammenfaßte, daß zu jedem Punkt P = P(x,y,z) der gegebenen Fläche ein anderer Punkt P = P´(x´,y´,z´) auf der transformierten Fläche gehört, der von ihm die konstante Entfernung $|K|^{-1/2}$ hat. Aus der zweiten und dritten Gleichung ersieht man, daß P´ auf der zu P gehörigen Tangentialebene der ursprünglichen Fläche und ebenso P auf der zu P´ gehörigen Tangentialebene der transformierten Fläche liegt. Die vierte ist die Bedingung dafür, daß die entsprechenden Tangentialflächen senkrecht aufeinander stehen.

Etwa zeitgleich mit BIANCHI fand LIE 1879 eine andere Transformation, die allgemeiner als BIANCHIs Komplementärtransformation ist. Lie hierzu [Lie 1879]:

"Bezeichnet man mit u und v die Bogenlängen der Haupttangentenkurven einer Fläche konstanter Krümmung, mit Φ den Winkel zwischen zwei einander schneidenden Haupttangentenkurven, so besteht nach einer Bemerkung von Bonnet eine Gleichung der Form:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} = K \sin\Phi\,; \qquad K = const.$$

Ist nun $\Phi = f(u,v)$ eine bekannte Lösung dieser partiellen Differentialgleichung, so ist

$$\Psi = f\left(\rho u, \frac{v}{\rho}\right); \qquad \rho = const$$

eine allgemeinere Lösung. Infolge derselben können aus einer vorgelegten Fläche immer ∞^1 neue derartige Flächen hergeleitet werden."[5]

LIE hatte sich, seit er die Arbeit von BIANCHI von 1879 erhalten hatte (spätestens im April 1880 [Lie, Bd. III, S.726]) intensiv mit BIANCHIs Transformation auseinandergesetzt. Und er kam zu folgendem Ergebnis, das er 1880 in einem Brief KLEIN mitteilt [Lie, Bd. III, S.732]:

"Ich betrachte es als sicher, daß die Vereinigung von Bianchis und meinen Untersuch. die allgemeine Bestimmung aller Fl. konst. Kr. leistet. Mein Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung ist sehr weit ausgeführt, so weit, daß ich jedenfalls kaum zweifele. Aber wie gesagt, fertig ist der Beweis nicht, und es wird auch nicht leicht sein, ihn fertigzubringen."

In einem späteren Brief des gleichen Jahres an KLEIN bestätigte LIE seine Vermutung. Ähnlich veröffentlichte er es auch 1880 [Lie 1880b]. Doch den Beweis veröffentlicht LIE erst 1883 [Lie 1883], kurz nachdem BÄCKLUND seine Transformationsmethode veröffentlicht hatte, die die Bestimmung aller pseudosphärischen Flächen erlaubt.

---

[5] Mit

$$\rho = \frac{1 + \sin\sigma}{\cos\sigma}$$

wobei σ = willkürliche Konstante und $\Phi = \Psi(u,v)$ eine nicht triviale Lösung der SG-Gleichung, erhält man durch die Lietransformation $L_\sigma\Phi = \Phi'$ einfach unendlich viele Lösungen der Form

$$\Phi' = \Psi\left(\frac{1+\sin\sigma}{\cos\sigma}u, \frac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}v\right).$$

Diese Gleichung geht mit den Parametern _ und v aus Gleichung (3.6) über in

$$\Phi' = \Xi\left(\frac{\tilde{u} - \tilde{v}\sin\sigma}{\cos\sigma}, \frac{\tilde{v} - \tilde{u}\sin\sigma}{\cos\sigma}\right)$$

In der Physik ist diese Transformation als Lorentztransformation zwischen zwei Inertialsystemen bekannt, die sich mit der Geschwindigkeit v = c sin σ (c = Lichtgeschwindigkeit) gegeneinander bewegen.

3.4 Die Bäcklundtransformation

ALBERT VICTOR BÄCKLUND gelang es 1883, die von Bianchi gefundene *Komplementärtransformation* wesentlich zu erweitern [Bäcklund 1883]. Während BIANCHI verlangt hatte, daß die Tangentialebenen entsprechender Punkte senkrecht aufeinander stehen müssen, stellte BÄCKLUND nur die Forderung, daß der Winkel σ zwischen zwei solchen Ebenen konstant sei. In dieser allgemeineren Transformation ist also die Bianchische als spezieller Fall enthalten. Bäcklund griff die von LIE eingeführte Notation der Bianchitransformation auf und verallgemeinerte sie folgendermaßen:

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = \frac{1}{K}$$

$$(x' - x)\frac{dz}{dx} + (y' - y)\frac{dz}{dy} - (z' - z) = 0$$

$$(x' - x)\frac{dz}{dx'} + (y' - y)\frac{dz}{dy'} - (z' - z) = 0$$

$$1 + \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dx'} + \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dy'} - \sigma\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy'}\right)^2} = 0$$

Diese später nach ihm benannte *Bäcklundtransformation* (genauer: Auto-Bäcklundtransformation der SG-Gleichung) transformiert jede pseudosphärische Fläche bei einmaliger Anwendung in ∞^1 viele Flächen gleicher Krümmung. Flächen nicht konstanter und negativer Gaußscher Krümmung transformiert sie nicht in Flächen gleicher Art.

BÄCKLUNDS frühe Arbeiten zur von LIE begründeten Theorie der Berührungstransformationen [Bäcklund 1874 - 1883] stehen in enger Verbindung mit den Arbeiten LIEs dieser Zeit, wie in [Kirschnick 1996] gezeigt wird. Man kann den Eindruck bekommen, daß BÄCKLUND Gedanken von LIE erweiterte, neue Details und Verallgemeinerungen hinzufügte. Daher ist einer Äußerung GEORGE L. LAMBs aus einer heute sehr bekannten Arbeit zur Geschichte der Bäcklundtransformation [Lamb 1976, S. 62] zu widersprechen:

> "Research on pseudospherical surfaces ... led A. V. Bäcklund to discover, in about 1875, the transformation theory that now bears his name."

LAMB zitierte in diesem Zusammenhang die Arbeit [Bäcklund 1874]. Diese Arbeit und [Bäcklund 1876] sind BÄCKLUNDs ersten zur Theorie der Berührungstransformationen. Sie sind in einem Zusammenhang zu sehen mit Arbeiten LIEs [Lie 1873, 1874], denn in ihnen geht BÄCKLUND auf die Erweiterbarkeit der von LIE untersuchten Berührungstransformationen ein. Der Anstoß zu einer Verallgemeinerung der Lieschen Berührungstransformationen kam erst 1879 durch die Gedanken BIANCHIs zur Transformation pseudosphärischer Flächen aus der Differentialgeometrie. Diese "Befruchtung" der "analytischen Theorie der Punkt- und

Berührungstransformationen" durch die Gedanken BIANCHIs markiert den Beginn der Theorie der Bäcklundtransformationen. Die Auto-Bäcklundtransformation der SG-Gleichung schuf LIE daraufhin im gedanklichen Entwurf 1880 (s.o.) und BÄCKLUND explizit erst 1883. Die von LAMB zitierte Arbeit Bäcklunds [Bäcklund 1874] ist eher eine "Vorarbeit" Bäcklunds, die zur Entdeckung der BT hinführte. LAMBs Äußerung zur Entstehung der Theorie der Bäcklundtransformationen wurde vielfach unbesehen dahingehend interpretiert, daß die Bäcklundtransformation 1875 von BÄCKLUND entdeckt wurde [DEGM 1982] [Rogers 1990] [Fordy 1994], eine Jahreszahl die in der Literatur ebenso häufig zu finden ist wie 1883. Eine Bemerkung NOVIKOVs zu diesem Thema ist ebenfalls irreführend [Novikov 1992], der ohne weitere Erklärungen BIANCHI als den Entdecker der Bäcklundtransformation bezeichnete.

GASTON DARBOUX (1842 - 1917) formte die Bäcklundtransformation, die er als verallgemeinerte Bianchitransformation bezeichnete, 1894 in die später üblichen Formen (3.14a,b) um [Darboux 1887, III, §827] und nannte sie "Transformation de Bäcklund". Bilden die Asymptotenlinien die Parameterlinien u = const. bzw. v = const. und der Winkel Φ zwischen den Asymptotenlinien die abhängige Variable, so nimmt die Bäcklundtransformation folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial(\Phi_\sigma - \Phi)}{\partial u} = 2\,\frac{1+\sin\sigma}{\cos\sigma}\,\sin\frac{\Phi_\sigma+\Phi}{2}\ ,$$

$$\frac{\partial(\Phi_\sigma + \Phi)}{\partial v} = 2\,\frac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}\,\sin\frac{\Phi_\sigma-\Phi}{2} \tag{3.14a}$$

Diese Transformationsgleichungen implizieren auf die bekannte Weise Integrabilitätsbedingungen. Die Gleichungen kann man so arrangieren, daß eine der beiden Variablen herausfällt, so daß man also wahlweise eine Differentialgleichung für Φ oder eine für Φ_σ erhält. Es ergibt sich gerade die SG-Gleichung für Φ oder die SG-Gleichung für Φ_σ. Somit gilt folgendes: Ist $\Phi = \Phi(u,v)$ eine Lösung der SG-Gleichung, so sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Integrabilität von (3.14a) - als Gleichung für Φ_σ - erfüllt. Die Lösung $\Phi_\sigma = \Phi_\sigma(u,v) = \Phi_\sigma(u,v,c)$ erfüllt die SG-Gleichung und hängt noch von zwei Parametern σ und c ab, wobei c eine Integrationskonstante ist. Die Lösung $\Phi_\sigma = B_\sigma\ \Phi$ wird Bäcklundtransformierte von Φ genannt. Sind die Hauptkrümmungslinien die Parameterlinien, so nimmt die Bäcklundtransformation folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial\phi_\sigma}{\partial\tilde{u}} + \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{v}} = \frac{\cos\phi\ \sin\phi_\sigma + \sin\sigma\ \sin\phi\ \cos\phi_\sigma}{\cos\sigma}\ ,$$

$$\frac{\partial\phi_\sigma}{\partial\tilde{v}} + \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{u}} = -\,\frac{\sin\phi\ \cos\phi_\sigma + \sin\sigma\ \cos\phi\ \sin\phi_\sigma}{\cos\sigma} \tag{3.14b}$$

Kurz nachdem Bäcklund seine Transformationsmethode veröffentlicht hatte, beschrieb 1883 LIE die schon 1880 von ihm geahnte Verknüpfung der Bianchischen mit seiner Transformation zu einer Transformation, die den Zugang zur allgemeinen Lösung der SG-Gleichung schafft. Und es gelang LIE, diese mit der Bäcklundtransformation zu identifizieren [Lie 1883, S. 556]:

"Bezeichne ich Bianchis Operation zur Konstruktion von neuen Flächen konstanter

Krümmung mit I, Bäcklunds mit B und meine mit O, so ist es immer möglich, die Konstante in meiner Operation so zu wählen, daß die Relation

$$B = O\, I\, O^{-1}$$

besteht. Bäcklunds äußerst interessante Transformation ist hiermit zurückgeführt auf Bianchis und meine, wobei jedoch zu bemerken ist, daß Bäcklunds Transformation unter den bekannten Voraussetzungen nur Quadratur verlangt, während meine Transformation die Integration einer Riccatischen Gleichung erster Ordnung verlangt."

DARBOUX beschrieb 1894 die Verbindung zwischen Bianchi- und Lietransformation und der Bäcklundtransformation folgendermaßen [Darboux 1887, III, § 811]: Die Bianchitransformation nicht nur auf eine Fläche S angewandt, sondern auf alle durch die Lietransformation transformierten Flächen $L_\sigma S$, entspricht einer Bäcklundtransformation B_σ. Da $L_0 = 1$, geht auch auf diese Weise die Bäcklundtransformation B_0 mit $\sigma = 0$ in die Bianchitransformation über. Kann man eine pseudosphärische Fläche nebst der Gruppe der aus ihr durch Lies Transformation entstehenden bestimmen, so beruht die weitere Anwendung der Bäcklundtransformation bzw. der Bianchi- und Lietransformation auf die entstandenen Flächen nur auf Differentiation und Elimination. DARBOUX drückte diesen Vorgang in der auch heute üblichen symbolischen Schreibweise folgendermaßen aus:

$$B_\sigma = L_\sigma\, B_0\, L_{-\sigma}$$

A. VOSS [Voss 1903] und ihm folgend später andere Autoren [Seeger 1980a] bezeichneten dies als *Darbouxschen Satz*. Sie übersahen, daß er schon von LIE stammt!

Eine wichtige Vervollkommnung erfuhr die Transformationstheorie für pseudosphärische Flächen 1892 durch einen Satz von BIANCHI, den er als *Vertauschbarkeitssatz* bezeichnete [Bianchi 1892]. Symbolisch lautet er:

$$B_{\sigma_2}\, B_{\sigma_1} = B_{\sigma_1}\, B_{\sigma_2}$$

BIANCHI hierzu [Bianchi 1910, §260]:

"Sind zwei pseudosphärische Flächen S_1, S_2 mit ein und derselben pseudosphärischen Fläche S durch zwei Bäcklundsche Transformationen $B_{\sigma 1}$ bzw. $B_{\sigma 2}$ mit verschiedenen Konstanten σ_1, σ_2 verknüpft, so gibt es eine vierte pseudosphärische Fläche $S_{1,2}$, die nun wieder mit den selben beiden Flächen S_1, S_2 durch Bäcklundsche Transformationen $B_{\sigma 1}$ bzw. $B_{\sigma 2}$ mit vertauschten Konstanten verknüpft ist. Offenbar gelangt man von S zu $S_{1,2}$ entweder, indem man zuerst $B_{\sigma 1}$ dann $B_{\sigma 2}$, oder indem man zuerst $B_{\sigma 2}$ und dann $B_{\sigma 1}$ ausführt."

Der speziellere Fall des Vertauschbarkeitssatzes

$$B_0\, B_{\sigma_1} = B_{\sigma_1}\, B_0$$

war von BIANCHI schon 1886 gefunden worden [Bianchi 1886]. Der Vertauschbarkeitssatz hat nun eine wichtige Konsequenz, die zum Ausbau der Transformationsmethode beitrug. BIANCHI zeigte nämlich im Beweis seines Satzes, daß wenn Φ_1 und Φ_2 die Bäcklundtransformierten einer beliebigen Lösung Φ zu den Konstanten σ_1, σ_2 sind, ($\sigma_1 \neq \sigma_2$) aus dem Vertauschbarkeitssatz folgt:

$$\tan\frac{\Phi_{1,2}-\Phi}{2} = \frac{\cos\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}{\sin\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}}\tan\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}. \tag{3.15}$$

Diese Relation ist sehr bemerkenswert, da sie drei Lösungen Φ, Φ_1, Φ_2 auf rein funktionale Weise (d.h. ohne weitere Integration) eine vierte Lösung zuordnet. Eine solche Relation bezeichnet man heute als *nichtlineare Superposition*. Eine solche war vordem schon für Lösungen der Riccatigleichung bekannt. Die obige Superposition kann beliebig oft wiederholt werden, so daß eine beliebige Anzahl Bäcklundtransformierter aus einer Anfangslösung Φ generiert werden kann. Insbesondere für die zweimalige Anwendung der gleichen Bäcklundtransformation auf die beliebige Anfangslösung erhält man [Bianchi 1910, § 262]:

$$\tan\frac{\Phi_{11}-\Phi}{2} = \cos\sigma_1\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\sigma}+c_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial c}\right]_{\sigma=\sigma_1}$$

wobei c_1 eine willkürliche Konstante ist und $c = f(\sigma)$ eine beliebige Funktion mit $f(\sigma_1) = c_1$. Im Jahre 1899 [Bianchi 1899] entdeckte BIANCHI, daß zwei Bäcklundtransformationen mit komplexen σ_i auf eine reelle Lösung $\Phi_{1.2}$ führen können, falls $\Phi_1^* = \Phi_2$ und $\sigma_1^* = \sigma_2$, bzw. $\sigma_1 = \sigma' + i\sigma''$ und $\sigma_2 = \sigma' - i\sigma''$. Die den Lösungen Φ_1 und Φ_2 entsprechenden pseudosphärischen Flächen sind dann zwar imaginär, die aus der Bäcklundtransformation $B_{\sigma 1}\, B_{\sigma 2}$ entstehende Lösung $\Phi_{1,2}$ jedoch ist reell, ebenso wie die ihr entsprechende pseudosphärische Fläche $S_{1,2}$.

Die Bäcklundtransformation ist - historisch gesehen - als Ergebnis der Synthese zweier Strömungen entstanden: einer geometrischen und einer analytischen. Es gibt somit auch zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen, mit denen die Bäcklundtransformation angeschaut werden kann. Die geometrische Betrachtungsweise der Bäcklundtransformation als Flächentransformation in der Art, wie BIANCHI bzw. RIBAUCOUR sie formuliert haben (s.o.), ist mit den Solitonen schwer in Verbindung zu bringen. Zum Verständnis des Solitons trägt vielmehr die analytische Betrachtung der Bäcklundtransformation bei, weil sie zu der Frage führt, wie Linearität und Nichtlinearität miteinander in Beziehung stehen. Eine Solitonengleichung zeichnet sich dadurch aus, daß sie nichtlinear ist und auf die eine oder andere Weise auf lineare Gleichungen rückführbar ist. Diese Eigenschaft ist an der Bäcklundtransformation der SG-Gleichung studierbar. Aus ihr läßt sich durch geschickten Ansatz ein System simultaner Riccatigleichungen ableiten, das sich durch einen wohlbekannten Quotientenansatz linearisieren läßt. So hat man ein lineares System, dessen Integrabilitätsbedingung eben die SG-Gleichung ist, und man hat in dem linearen System noch einen freien Parameter.

3.5 Zur weiteren Entwicklung der Theorie der Bäcklundschen Transformationen

Die bis hierher geschilderten Entwicklungen in der frühen Periode der Solitonentheorie wurden bei Beginn der klassischen Phase wieder aufgenommen. Sie trugen zu deren Etablierung mit bei. Weitere Entwicklungen zur Bäcklundtransformation, die zeitlich gesehen auch innerhalb der frühen Periode der Solitonentheorie gemacht wurden, wurden in der klassischen Periode erst später mit der Solitonentheorie in Verbindung gebracht. Sie gehören daher nicht eigentlich zur frühen Geschichte der Solitonentheorie. Diese neueren Entdeckungen sind recht vielfältig und die Forschungen sind bis heute nicht abgerissen. Des Überblicks halber seien hier einige - weniger bekannte - hier kurz gestreift.

Die Theorie der Bäcklundschen Transformationen ist um die Jahrhundertwende häufig bearbeitet worden. Dabei war die Verallgemeinerung der Bäcklundtransformation vorrangiges Ziel [Lamb 1976]. Es wurden Versuche unternommen, Bäcklundsche Transformationen für weitere Differentialgleichungen zu finden und sie somit für weitere Probleme innerhalb der Theorie der Differentialgleichungen nutzbar zu machen. Ein Beispiel dafür sind die Arbeiten von JEAN CLAIRIN [Clairin 1900 - 1913], der nach einer Methode suchte, welche Bäcklundtransformationen für beliebige Gleichungen produzierte, falls sie existieren. Eine kurze Beschreibung einiger Arbeiten CLAIRINs, seiner Methode nebst Beispielen findet sich in [Lamb 1976]. Eine weitere Förderung erfuhr die Theorie der Bäcklundtransformation durch EDOUARD GOURSAT [Goursat 1902a, b - 1925], die z.T. in [Liebmann 1914] beschrieben werden.

In der Lehrbuchliteratur wurde die Bäcklundtransformation sowohl von DARBOUX [Darboux 1887] als auch von BIANCH [Bianchi 1894, 1910] sehr ausführlich bearbeitet. Mit dem Lehrbuch von EISENHART [Eisenhart 1909] wurde die Bäcklundtransformation erstmalig in englischer Sprache vorgestellt. Somit lagen umfangreiche und bekannte Lehrbücher in italienischer, deutscher, französischer und englischer Sprache vor, die die Bäcklundtransformation eingehend darstellten. Trotzdem geriet sie - wie weite Teile der Differentialgeometrie überhaupt - für lange Zeit in Vergessenheit.

1992 machte SERGUEI TSAREV [Tsarev 1992] darauf aufmerksam, daß die Bullough-Dodd-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{\theta} - e^{-2\theta} \ ,$$

ebenfalls eine Solitonengleichung, schon 1910 von dem rumänischen Mathematiker G. TZITZÉICA behandelt wurde [Tzitzéica 1910], und zwar in der Form:

$$\frac{\partial^2 \ln \Theta}{\partial \tilde{u}\, \partial \tilde{v}} = \Theta - \frac{1}{\Theta^2}.$$

TZITZÉICA gab auch das dazugehörige lineare Differentialgleichungsproblem sowie die

Bäcklundtransformation dazu an.

Auf eine weitere Verknüpfung der Solitonentheorie mit der klassischen Differentialgeometrie machte B. A. DUBROVIN aufmerksam [Dubrovin 1990]. Von ihm kommt der Hinweis, daß das durch die IST integrable Drei-Wellen-System mit dem Egorov-Koordinatensystem zusammenhängt. TSAREV bemerkt hierzu [Tsarev 1992], daß solch ein System schon 1866 von DARBOUX angeregt worden ist, der 1910 dieses System Egorov-System nannte [Darboux 1910]. D. TH. EGOROV griff 1901 in seiner Doktorarbeit DARBOUXs Gedanken von 1866 auf [Egorov 1901] und BIANCHI fand 1915 die dazugehörige Bäcklundtransformation und die Superpositionsgleichung [Bianchi 1915].

Eine große Fülle von Lösungen der SG-Gleichung der Form

$$\omega = 4 \arctan\left[\frac{F\left(au + \frac{v}{a}\right)}{G\left(au + \frac{v}{a}\right)}\right]$$

wurde von RUDOLPH STEUERWALD angegeben [Steuerwald 1936]. Er behandelte die Enneperschen Flächen, insbesondere die mit negativer Gaußscher Krümmung, sehr ausführlich und lieferte eine gründliche Diskussion ihrer Bäcklundtransformationen.

Infinitesimale Bäcklundtransformationen wurden von CHARLES LOEWNER behandelt [Loewner 1952].

Im Zusammenhang mit Solitonen wurde nur die Bäcklundtransformation für die SG-Gleichung sehr früh, nämlich 1953, von ALFRED SEEGER, HANS DONTH und ALBERT KOCHENDÖRFER [SDK 1953] aufgegriffen. Die Bäcklundtransformationen für weitere Solitonengleichungen wurden erst in jüngerer Zeit erforscht. Z. B. behandelten HUGO WAHLQUIST und FRANK ESTABROOK [Wahl., Esta. 1973] die Bäcklundtransformation der KdV-Gleichung sowie GEORGE LAMB JR. 1974 [Lamb 1974] die Bäcklundtransformation für die mKdV-Gleichung und die Nichtlineare Schrödingergleichung.