5. Der Übergang von der frühen zur klassischen Geschichte der Solitonentheorie

Die Solitonentheorie hat in den letzten drei Jahrzehnten nicht nur ihren Begriffsapparat entwickelt, sondern sich auch quantitativ (Anzahl der Arbeiten) und qualitativ (Übergreifen auf neue Gebiete) außerordentlich ausgedehnt. In der Physik und den angewandten Naturwissenschaften fanden sich immer mehr Phänomene, die mit Solitonengleichungen beschreibbar sind, bis hin in die Technik, in der Wellen mit Teilcheneigenschaften Anwendungen fanden. Eine Übersicht hierüber liefern die Artikel von [Bishop 1979] und [Newell 1985]. In der Mathematik konnten mit integrablen Systemen vom Evolutionstyp zunächst Gebiete, die bisher mehr oder weniger unabhängig waren, in Verbindung gebracht werden, wie eine Grafik in dem Übersichtsartikel [Bull., Cau. 1995] veranschaulicht. In diesem Kapitel soll aufgezeigt werden, welche Entwicklungen zu der raschen Ausbreitung der Solitonentheorie führten.

Das in den siebziger Jahren schnell anwachsende Interesse an der Solitonentheorie gründete sich einerseits auf die Entwicklungen der Theoretischen Physik, hauptsächlich aus den sechziger Jahren, die zu den Anwendungen von Solitonen und Solitonengleichungen als Modell für verschiedene physikalische Phänomene führten. Andererseits sind es die Entwicklungen in der Mathematik, die 1967 zur Entdeckung der Inversen Streutransformation (IST) geführt hatten, der wichtigsten Integrationsmethode von Solitonengleichungen. Insbesondere die Verbindung der Teilcheneigenschaften von Solitonenlösungen mit der Integrabilität ihrer Differentialgleichungen bewirkte ein schnell anwachsendes Interesse an diesen Gleichungen und ihren Lösungen. Es wurden Zusammenhänge erkannt, es etablierte sich ein eigenes Begriffssystem der Solitonentheorie; die Solitonentheorie konstituierte sich.

Die Anwendungen der Solitonengleichungen als physikalische Modelle und die Entdeckungen, die zu diesen Modellen führten sind in der Literatur schon beschrieben worden. Weniger im Bewußtsein ist allerdings die Tatsache, daß in den sechziger Jahren *so viele* Anwendungen von Solitonengleichungen fast gleichzeitig entdeckt wurden. Es bestand also erstmalig ein großer Bedarf nach Integrationsmethoden für diese nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, weil man sich aus weiteren Lösungen der neuentdeckten Modellgleichungen weitere Anwendungen versprach. Dieser Bedarf wurde mit der Ausarbeitung der IST befriedigt, mit der die verschiedenen Modellgleichungen (Solitonengleichungen) zu einer Klasse zusammengefaßt werden und somit auch eine Verbindung zwischen den physikalischen Modellen direkt hergestellt werden konnte. Daher wird allein die Entdeckung der IST als Beginn der Solitonentheorie gefeiert. Dieses Bild der Entstehung der Solitonentheorie durch die IST ist eingängig und allgemein verbreitet. Es ist jedoch zu einfach und wird der Entstehung der Solitonentheorie nicht gerecht. Hier wird ein komplexeres und weiter in die

Wissenschaftsgeschichte zurückgehendes Bild gezeichnet. Es soll ferner in diesem Kapitel gezeigt werden, daß die IST, auch aufbauend auf den in den Kapiteln 2, 3 und 4 untersuchten Entwicklungslinien, allein die Solitonentheorie nicht zur Ausbreitung hätte bringen können, ebensowenig wie es die Bäcklundtransformation der SG-Gleichung nach 1953 geschafft hatte. Erst die in den sechziger Jahren entdeckten vielen Anwendungen ermöglichten das. Die Integrationsmethoden waren die von vielen Theoretischen Physikern, die sich auf die Suche nach weiteren Lösungen begeben hatten, ersehnte Hilfe.

In diesem Kapitel werden nur wenige gänzlich unbekannte Details besprochen; eine Ausnahme bilden die persönlichen Mitteilungen KAUPs, ZABUSKYs und HOBARTs zur Entstehung der Solitonentheorie. Neu ist jedoch das Bild, das sich aus der Gesamtheit der vielen z.T. auch sehr wenig bekannten Details der expliziten Entstehung der neuen Disziplin *Solitonentheorie* zusammensetzt. Daher werden die frühen solitonischen Modelle innerhalb der Physik sowie die Entwicklungen, die zur IST führten, hier kurz besprochen.

5.1 Weitere frühe Anwendungen von Solitonengleichungen in der Physik

Einen exzellenten ersten Überblick über die frühen Anwendungen von Solitonengleichungen in der Physik lieferten schon in den frühen siebziger Jahren die Artikel [BEMS 1971] und [SCM 1973]. Die Anwendung der SG-Gleichung als Gleichung für wandernde Versetzungen in der Festkörperphysik wurde schon in Kapitel 4 ausführlich untersucht. Eine weitere frühe Anwendung von Solitonen und Solitonengleichung, diesmal als Modell in der Feldtheorie, verdient besondere Beachtung: Die SG-Gleichung wurde 1958 als Feldgleichung von TONY HILTON ROYLE SKYRME (1922 - 1987) verwendet, der Lösungen der SG-Gleichung als Modell für Elementarteilchen vorschlug [Skyrme 1958]. Die zugrunde liegende Idee, Teilchen nicht als harte Kugeln oder gar Punkte zu betrachten, sondern als Gebiete hoher Feldintensität, ist schon alt. Bereits Lord KELVIN mißfiel das Modell punktförmiger Atome und er schlug vor, Atome stattdessen als Wirbel in einer Art Flüssigkeit zu betrachten [Kelvin 1904]. Während der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts wurden immer wieder Versuche unternommen, eine Theorie zu finden, die die Elementarteilchen als ausgedehnte Feldobjekte behandelte. Einen Überblick hierüber liefert die Arbeit [BEMS 1971]. In seinen späteren Jahren verwandte EINSTEIN viel Mühe darauf, die Dualität zwischen dem punktförmigen Teilchen und dem Feld in einem vereinheitlichenden Modell aufzuheben. Er verfolgte das Ziel, eine nichtlineare Feldgleichung zu finden, deren nichtsinguläre Lösungen Teilchen, Wellen und Wechselwirkungen darzustellen vermochten. Ein naheliegender Ansatz ist die semilineare Wellengleichung $\Box u = f(u)$ für das Feld u. Von hier aus ist es nicht weit bis zur SG-Gleichung, und eben diesen Weg beschritt SKYRME, der ebenfalls eine "anschauliche" Beschreibung des Nukleons als ein ausgedehntes Objekt bevorzugte. SKYRME selbst glaubte nie an die strenge Gültigkeit einer Theorie der Punktteilchen, sondern betrachtete solche Beschreibungen eher als Krücke, die zum Verständnis einiger Eigenschaften dienen konnten [Skyrme 1988].

Ausführliche Kommentare zur Geschichte des Modells von SKYRME liefern DALITZ in einer Biographie SKYRMEs [Dalitz 1988] sowie die Arbeiten [Skyrme 1988], [Sanyuk 1992] und [MRS 1993]. Die Entstehung des Skyrme-Modells sei deshalb hier nur äußerst kurz wiedergegeben. SKYRME begann mit seiner ersten Arbeit zu Kernmodellen [Skyrme 1954] hydrodynamische Ideen zur Beschreibung ausgedehnter Kerne einzubringen. So führte er zur Lösung eines Widerspruches zwischen experimentellen Ergebnissen und der Theorie ein Modell des Atomkerns ein, das diesen als klassische Flüssigkeit beschreibt, eine Meson-Flüssigkeit, in der die Nukleonen als wirbelartige Gebilde vorgestellt werden. Neue Entdeckungen zur Symmetrie der schwachen Wechselwirkung veranlaßten SKYRME zu Modifikationen seines Meson-Flüssigkeit-Modells. Überlegungen zur Vereinfachung seiner Theorie schließlich führten ihn zur SG-Gleichung als Feldgleichung [Skyrme 1958]. SKYRME war die Integration der SG-Gleichung mittels Bäcklundtransformation unbekannt. Es gelang ihm jedoch, eigenständig zu Lösungen zu gelangen. Als hervorragender Mathematiker und Gewinner etlicher mathematischer Preise war er in Los Alamos, wo er am Manhattan-Projekt mitgewirkt hatte, bekannt als Experte für das Auffinden von Lösungen von Differentialgleichungen auf analytischem und numerischem Wege. So gelang es ihm auch, die Ein-Solitonenlösung, mehrere Zwei-Solitonenlösungen, sowie oszillatorische Lösungen der SG-Gleichung zu finden, die als verschiedene Elementarteilchen interpretiert werden konnten [Skyrme 1962], [Per., Sky. 1962]. SKYRME führte sogar zusammen mit PERRING numerische Experimente zu Kollisionen von Solitonenlösungen der SG-Gleichung durch [Per., Sky 1962]. Hierbei entdeckten sie die Kollisionseigenschaften der Solitonenlösungen der SG-Gleichung. Sie stellten u.a. das gleiche Experiment unabhängig von SEEGER an, das SEEGER 1953 vorgestellt hatte: Eine oszillatorische Lösung der SG-Gleichung (bei SKYRME und PERRING als Meson interpretiert) trifft auf die Ein-Solitonenlösung der SG-Gleichung (ein ruhendes Baryon) und läßt es nach der Kollision verschoben und weiterhin ruhend zurück. SKYRME interpretierte die oszillatorischen Lösungen als Mesonen. In den Solitonenlösungen sah er Modelle für Baryonen [Skyrme 1961, 1962]. Mit dieser Theorie der später sogenannten "Skyrmions"[1] war es ihm möglich, in einer Theorie Bosonen und Fermionen zu vereinigen. Das Modell ist analog zu SEEGERs Vorstellungen, der in einer Theorie die (oszillatorischen) Phononen und (teilchenartigen) Versetzungen behandeln konnte und somit Phonon-Teilchen-Wechselwirkung mit einer Gleichung zu beschreiben vermochte.

Ebenso wie SEEGERs Arbeiten zur SG-Gleichung in der Theorie der Versetzungen zehn Jahre früher hatten auch SKYRMEs wegweisende Arbeiten nicht die Durchschlagskraft, um sein Modell zur weitgehenden Akzeptanz zu verhelfen. Erst in den siebziger Jahren wurden seine Arbeiten wieder aufgegriffen und Anfang der Achtziger, also gut zwanzig Jahre nach ihrer Veröffentlichung, wurde die Reichweite seiner Ideen erkannt und sie wurden weiter ausgebaut. Die damalige Situation wird in [MRS 1993] sehr bildhaft beschrieben: In den 60er Jahren war die Neuheit von SKYRMEs Gedanken zur Teilchenphysik so überwältigend, daß nur wenige Amateure in das "ruhige Becken seiner Theorie" sprangen, die so weit entfernt vom Hauptstrom der Entdeckungen in der Teilchenphysik schien. Erst in den 80er Jahren, als das Skyrme-Modell als Grenzfall der Quantenchromodynamik bekannt wurde, wurde das "Becken" zeitweilig gestürmt.

SKYRME war in den frühen sechziger Jahren in Großbritannien kein unbekannter Physiker und

[1] SKYRME wurde damit der dritte Forscher nach FERMI und BOSE, nach dessen Namen ein Elementarteilchen benannt wurde.

seine Feldtheorie mit der SG-Gleichung hätte den britischen Festkörperphysikern auffallen müssen. Innerhalb der britischen Festkörperphysik war die SG-Gleichung als Versetzungsmodell bekannt; nicht nur FRANK sondern auch SEEGER hatte es durch Vorträge bekannt gemacht [Seeger, pers. Mitt.]. Es ist daher verwunderlich, daß die Verbindung vom Versetzungsmodell der SG-Gleichung und SKYRMEs Modell der Feldtheorie nicht vollzogen wurde.

Die dritte Anwendung der SG-Gleichung nach ihrer Entdeckung als Modell für wandernde Versetzungen durch SEEGER und für Elementarteilchen durch SKYRME wurde 1959 veröffentlicht, also nur ein Jahr nachdem SKYRME die SG-Gleichung erstmalig erwähnte. Der Zusammenhang, in dem die SG-Gleichung diesmal gesehen wurde, ist die Dynamik von wandernden Blochschen Wänden. WERNER DÖRING hatte 1948 darauf aufmerksam gemacht [Döring 1948], daß die Verteilung der Magnetisierungsvektoren innerhalb einer Blochschen Wand sich bei Bewegung der Wand ändert. Daher ist der Energieinhalt der Wand bei Bewegung größer als in Ruhe. DÖRING zeigte, daß der Energieunterschied proportional zum Quadrat der Wanderungsgeschwindigkeit ist, gerade so, als ob die Wand eine träge Masse hätte. 15 Jahre später wurde von U. ENZ gezeigt [Enz 1963, 1964], daß die SG-Gleichung als ein - auf eine räumliche Dimension reduziertes - Modell für die Dynamik der wandernden Blochschen Wand verwendet werden kann. ENZ gab die Ein-Solitonenlösung der SG-Gleichung an, indem er, wie vor ihm SEEGER und andere, die zeitunabhängige "SG-Gleichung" löste und durch Lorentztransformation die Dynamik wieder einfügte. Er machte auch Äußerungen zu Vorgängen bei Kollision zweier solcher Teilchen, die jedoch nicht korrekt sind, da ENZ behauptete, zwei gleiche Teilchen würden sich abstoßen (wie Elektronen) und Teilchen und Antiteilchen würden sich auslöschen. Bemerkenswert ist eine Äußerung von ENZ, die zur Teilchenphysik weist [Enz 1963, S. 1393]:

> "It should be noted, however, that in this stage of the theory no attempt is made to identify a certain particle with the present model. A comparison of the invariant $\pm\pi$ with the baryon number is also possible."

Diese Andeutung von ENZ hatte wenige Jahre vor 1963 in der Theorie SKYRMEs ihre vollständige Ausarbeitung gefunden.

Nur wenige Jahre nach Erscheinen der Gedanken von SKYRME und ENZ zur SG-Gleichung fand die SG-Gleichung Anwendung in der nichtlinearen Optik. Unabhängig voneinander kamen 1965 zwei Arbeitsgruppen zu ganz ähnlichen Ergebnissen: F. T. ARECCHI und R. BONIFACIO zeigten, daß die SG-Gleichung als fundamentale Gleichung bei der Beschreibung der Wanderung ultrakurzer optischer Pulse durch ein 2-Niveau-System dienen kann [Are., Bon. 1965]. Sie verwandten die SG-Gleichung und suchten nach Lösungen. S. L. McCALL und E. L. HAHN entdeckten durch numerische Berechnungen, daß ultrakurze Lichtpulse oberhalb einer bestimmten Schwellenenergie ein resonantes optisches Medium durchlaufen können, so als wäre es transparent [McC., Hahn 1965]. Sie kamen 1965 noch nicht zur SG-Gleichung, doch in den Gleichungen dieser sogenannten *selbstinduzierten Transparenz*, ist als Grenzfall die SG-Gleichung enthalten, wie sie später fanden [McC., Hahn 1967]. Daher führen die Lösungen beider Modelle zu Solitonen. Experimentell [Pat., Slu. 1967] wie numerisch [Gib., Slu. 1970] wurde gezeigt, daß diese Gleichungen der selbstinduzierten Transparenz Lösungen erlauben, die - ähnlich wie die Lösungen der KdV-Gleichung von KRUSKAL und ZABUSKY (s. Kap. 5.2, und Abb. 5.2) - zu einzelnen kohärenten Pulsen mit Solitoneneigenschaften zerfallen. Im Jahre 1967 gelangte G. L. LAMB zu den gleichen Ergebnissen wie ARECCHI und BONIFACIO zwei Jahre zuvor, jedoch wohl unabhängig von ihnen, da er sie nicht zitierte [Lamb 1967]. Da LAMB auf die Arbeit von SEEGER, DONTH und KOCHENDÖRFER [SDK 1953] aufmerksam gemacht wurde, wie er in einer Fußnote bemerkte, stand ihm schon 1967 die Methode der Bäcklundtransformation zur Verfügung. Mit deren Hilfe gelangte LAMB zu Mehrsolitonenlösungen der SG-Gleichung, die er als Beschreibung mehrerer Lichtpulse verwenden konnte. In seiner nur zwei Seiten langen Arbeit [Lamb 1967] stellte LAMB die Mehrsolitonenlösungen nur vor, ohne auf Kollisionseigenschaften einzugehen. LAMB war auf dem Gebiet der nichtlinearen Optik die ersten Jahre nach 1967 der einzige, der explizit die Bäcklundtransformation als Integrationsmethode der SG-Gleichung immer wieder vorstellte [Lamb 1969, 1971]. Da LAMB auch auf die Arbeit [SDK 1953] hinwies, war die Verbindung zwischen der Entwicklungslinie in der Festkörperphysik und der zum Übergang in die klassische Periode der Solitonentheorie hergestellt. Andere der vielen Autoren, die nun auf dem Gebiet der ultrakurzen Pulse arbeiteten (eine Übersicht liefern [BEMS 1971] und [SCM 1973]) griffen die Bäcklundtransformation in den sechziger Jahren meines Wissens noch nicht auf.

In einem weiteren und fünften Gebiet der Physik wurden in den sechziger Jahren SG-Solitonen entdeckt. Studien über die Bewegungen des magnetischen Flusses in supraleitenden Materialien zeigten 1966, daß SG-Solitonen Quanten des magnetischen Flusses in *Josephson-Barrieren* zwischen Supraleitern repräsentieren können. Die SG-Gleichung wurde in diesem Zusamenhang zuerst von O. KULIK erwähnt [Kulik 1966]. KULIK integrierte die SG-Gleichung in ihrer zeitunabhängigen Form, wie auch SEEGER, und kam zu Lösungen ähnlich der Gleichungen (4.16) und zu einer der Abb. 4.7 ähnlichen Zeichnung. Die direkte Verbindung von der Supraleitung zu SEEGER et alias gelang ein Jahr später P. LEBWOHL und M. J. STEPHEN [Leb., Ste. 1967], also im gleichen Jahr wie LAMB, die auf dem Artikel von KULIK aufbauen konnten. In ihrer Arbeit zu Bewegungen des magnetischen Flusses in Josephsonschen Barrieren verwandten sie die SG-Gleichung als Bewegungsgleichung und konnten mit Hilfe der von SEEGER dargestellten Bäcklundtransformation zu Mehrsolitonenlösungen gelangen. Es macht den Eindruck, als ob sie den Hinweis auf die Arbeiten SEEGERs, und damit auch auf die Bäcklundtransformation, von ROBERT HOBART, einem amerikanischen Feldtheoretiker, erhalten hätten, der schon in den fünfziger Jahren an dem Frenkel-Kontorova-Modell gearbeitet hatte (s. seine Bemerkung am Ende des Kapitels 4.1). Damit wurde gleichzeitig und doch unabhängig von LAMB auch auf dem Gebiet der Supraleitung auf die Entwicklungslinie in der Festkörperphysik aufmerksam gemacht. Hinweise zu weiteren Autoren, die etwas später an der SG-Gleichung als Modell in der Supraleitung gearbeitet haben finden sich in [BEMS 1971] und [SCM 1973].

Wie sehr in den sechziger Jahren an nichtlinearen Gleichungen in der Form $\Box\, u = f(u)$ zur Beschreibung der oben geschilderten Probleme gearbeitet wurde und daß die Forscher in verschiedenen physikalischen Disziplinen sich auf diesem Gebiet auch austauschten, zeigen verschiedene Bemerkungen. So schrieb LEBWOHL [Leb., Ste. 1967, S. 376]:

> "The nonlinear term in the equation of motion of vortex lines is taken, in accordance with Josephson, to be sin φ, where φ is the phase difference between the two superconductors. This simplifies the analysis considerably but the phenomena described here probably only depend quantitatively on the form of this term. Hobart (R. H. Hobart, private communication) has indicated how to obtain solutions of some related nonlinear equations."

ROBERT HOBART wiederum meinte zu dem Thema [persönliche Mitteilungen]:

> "In '58 I read Albert Einstein: Philosopher-Scientist, edited by P. A. Schilpp, 1949, pp 2-95. Einstein expressed his wish to find a nonlinear field equation with nonsingular solutions representing particles, waves, and interactions alltogether. I set myself the task of finding a "toy" example. Clearly this should be one-dimensional, real, and scalar. The simplest choice

is the wave equation with the right hand zero replaced with an unknown function of the field: $\Box\, u = f(u)$."

In einem anderen Brief an den Autor dieses Artikels schrieb HOBART über die SG-Gleichung:

"I bet a hundred researchers (myself included) have independently invented the model."

Die physikalischen Anwendungsmöglichkeiten der Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV-Gleichung), die schon in den sechziger Jahren entdeckt wurden, sind nicht so zahlreich und verschieden wie die der SG-Gleichung. Einmal abgesehen von der Kontinuisierung des Fermi-Pasta-Ulam-Problems (siehe nächstes Kapitel), diente die KdV-Gleichung zuerst nur zu Beschreibungen von Problemen, die aus der Hydrodynamik oder verwandten Gebieten stammten. Weiter ist hier die Plasmaphysik zu erwähnen. Im Jahre 1960 wurde von CLIFFORD GARDNER und G. K. MORIKAWA in unveröffentlichten Arbeiten des Courant Institute for Mathematical Sciences die KdV-Gleichung erwähnt als Näherung für Plasmawellen. Auch die Verbindung zur Hydrodynamik wurde hergestellt [Gar., Mor. 1960]. Die KdV-Gleichung gab die Möglichkeit, leichte Nichtlinearitäten durch dispersive Effekte auszugleichen. Wenige Jahre später wurde in einer russischen Arbeit zur Bewegung von Druckwellen in einem kalten Plasma [Ber., Kar. 1964] die KdV-Gleichung sowie die Arbeit von GARDNER und MORIKAWA erwähnt. In ihr findet sich der Hinweis auf eine bisher eher unbekannte Arbeit, daß nämlich neben GARDNER und MORIKAWA auch R. ZAGDEEV [Zagdeev 1960] die Analogie zwischen Flüssigkeitswellen in einem Kanal endlicher Tiefe und Plasmawellen am Beispiel der KdV-Gleichung erkannt hätte. Nach weiteren Arbeiten, die die KdV-Gleichung als Gleichung für Plasmawellen verwendeten [Morton 1964] [Was., Tan. 1966], [Ber., Kar. 1967] kann die KdV-Gleichung auf diesem Gebiet ab 1966 als etabliert gelten. Fernerhin wurde die KdV-Gleichung noch in den sechziger Jahren als Gleichung für Druckwellen in Flüssigkeits-Gas-Gemischen angegeben [Wijngaarden 1968], bevor sie in den siebziger Jahren in mehreren Gebieten der Physik Verwendung fand.

Auch die Boussinesq-Gleichung wurde schon in den fünfziger Jahren wieder aufgegriffen und zwar in ihrem originären Zusammenhang als Gleichung für Wasserwellen [Ursell 1953], sowie im Zusammenhang mit dem Fermi-Pasta-Ulam-Problem als Gleichung für Bewegungen in einem nichtlinearen Gitter [Zabusky 1967]. Die Nichtlineare Schrödingergleichung und ihre sech-Lösung, eine erst in der klassischen Periode der Solitonentheorie wichtig werdende Solitonengleichung, wurde schon ab 1964 in dem Gebiet der nichtlinearen Optik verwendet [CGT 1964] [Kelley 1965].

5.2 Von numerischen Simulationen zur inversen Streumethode

Das folgende Zitat aus [Ford 1992, S. 273] beschreibt den Beginn einer Entwicklungslinie, aus deren Anfängen, ähnlich den Anfängen der Entwicklungslinien in der Differentialgeometrie und der Festkörperphysik, schwer zu sehen ist, wie sie mit der Solitonentheorie zusammengehören könnte. Die Entwicklungslinie begann mit numerischen Experimenten am zu der Zeit leistungsstärksten Computer der Welt: MANIAC-I.

> "In the early 1950s MANIAC-I had just been completed and sat poised for an attack on significant problems. On one of his several visits to the Los Alamos Scientific Laboratory during this period, Enrico Fermi joined mathematician Stan Ulam and computer scientist John Pasta in a quest for suitable problems. They each recognized that MANIAC-I could answer questions holding great interest for mathematics and physics, but which one deserve immediate attention? After reflecting on the matter, Fermi suggested that it would be highly instructive to integrate the equations of motion numerically for a judiciously chosen, one-dimensional, harmonic chain of mass points weakly perturbed by nonlinear forces. ... the initial studies were intended merely to test the simplest and most widely believed assertion of equilibrium statistical mechanics such as equipartition of energy, ergodicity, and the like."

Die Motivation für die numerischen Experimente können in der von DEBYE aufgestellten Frage gesucht werden, warum Festkörper endliche Wärmeleitfähigkeit haben. DEBYE selbst hatte vorgeschlagen, die Antwort auf seine Frage in der nichtlinearen Kopplung der Atome innerhalb des Kristallgitters zu suchen, die eine Energiedissipation verursacht. Das hatte FERMI angeregt, numerische Experimente zur nichtlinearen Kopplung im Festkörper vorzunehmen [Fokas 1991]. Die Erinnerungen von ULAM [Ulam 1965] an die Anfänge jener numerischen Experimente weisen darauf hin, daß FERMI ganz bewußt innerhalb der Mathematischen Physik einen Vorstoß in das Gebiet der nichtlinearen Systeme unternehmen wollte:

> "Fermi expressed often a belief that future fundamental theories in physics may involve non-linear operators and equations, and that it would be useful to attempt practice in the mathematics needed for the understanding of non-linear systems. The plan was to start with the simplest such physical model and to study the results of the calculation of its long time behaviour. ... We had planned the work in summer of 1952 and performed the calculation in the following summer."

Als Untersuchungsobjekt wurde das numerische Modell einer linearen Kette aus 64 Massepunkten gewählt, die nichtlinear miteinander gekoppelt sind. Die Ergebnisse dieser numerischen Experimente, die u.a. in [Ford 1992], [Newell 1985] und [Jackson 1990] zusammengefaßt und erläutert sind, bezeichnete FERMI als "little discovery". Es hatte sich nämlich überraschenderweise gezeigt, daß trotz nichtlinearer Kopplung der Massenpunkte die Anfangsenergie sich nicht auf alle möglichen Moden verteilte, sondern nur auf einige erste Moden und daß sich ca. 97% der Anfangsenergie nach geringer Zeit wieder in der ersten Mode sammelte (s. Abb. 5.1).

Diese Ergebnisse schienen der statistischen Mechanik zu widersprechen, die bei nichtlinearen Systemen eine Gleichverteilung der Energie in allen Freiheitsgraden voraussagte. Im Mai 1955 erschienen die Ergebnisse der numerischen Experimente in einem Preprint [FPU 1955]. Im November 1954 war FERMI verstorben. Die Veröffentlichung des Preprints scheiterte an dem Umstand, daß sie ohne FERMIs Namen nicht geschehen konnte, mit FERMIs Namen wollten PASTA und ULAM das Preprint jedoch auch nicht veröffentlichen, da FERMI es nie gesehen und damit nicht gutgeheißen hatte [Ford 1992]. Das Preprint wurde jedoch auf Tagungen und Treffen von ULAM vorgestellt und erfuhr so, nicht zuletzt wegen seiner erstaunlichen Ergebnisse, eine weite Verbreitung. Erstaunen, aber auch Ablehnung und Kritik an der Versuchsdurchführung waren die Reaktionen, denn trotz vielfacher Bemühungen konnten die Ergebnisse zuerst nicht erklärt werden.

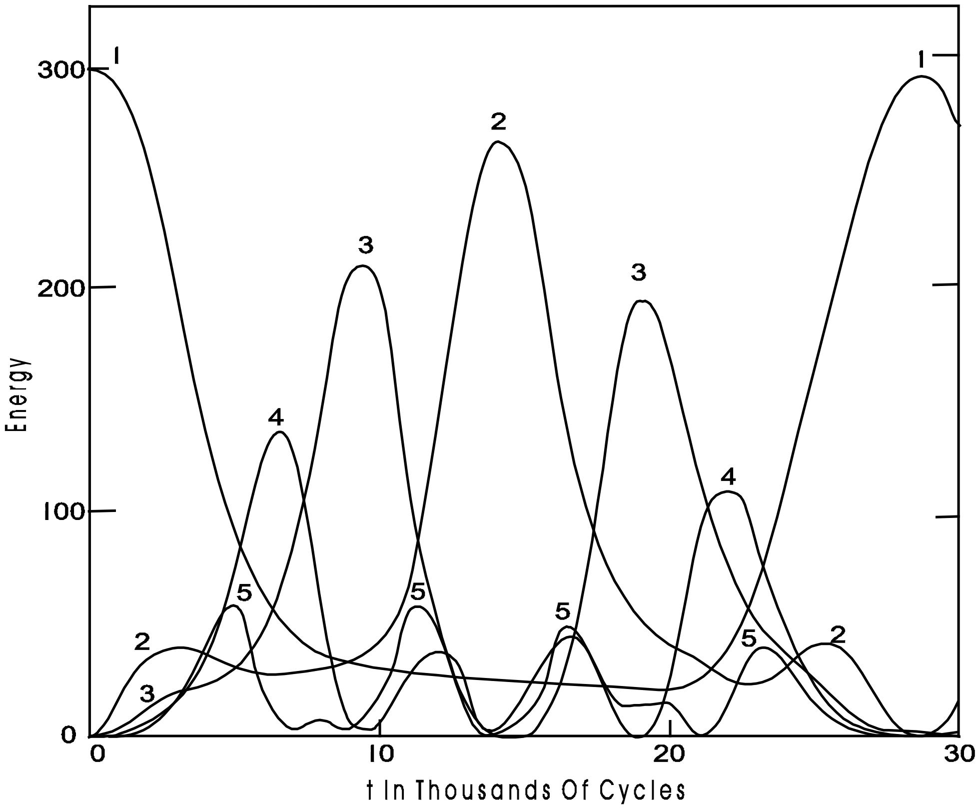

Abbildung 5.1:
Aus [FPU 1955] entnommene Grafik der Energieverteilung auf die verschiedenen Moden im Verlaufe der Zeit. Die Anfangsstellung der Massepunkte war in Ruhe in einer halben Sinuswelle. Sofort nach Beginn des Schwingens der Massepunktreihe absorbieren die untersten Moden Energie. Nach etwa 157 Perioden (nicht zu verwechseln mit den in der Ordinate angegebenen Rechenzyklen des Computers) sammelte sich die Anfangsenergie fast vollständig wieder in der Ursprungsmode ("FPU-Wiederkehr").

Ein störungstheoretischer Lösungsansatz von JACKSON [Jackson 1963] zeigte, daß das FPU-System nicht weit entfernt von einem integrablen System sein konnte [Ford 1992]. Daß das FPU-System tatsächlich durch ein integrables System angenähert werden konnte, zeigten dann 1965 MARTIN KRUSKAL und NORMAN ZABUSKY in [Zab., Kru 1965]. Da die Energie des FPU-Systems in den untersten Moden blieb, motivierte FERMIs Ansatz

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial t^2} = (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) + \alpha[(q_{n+1} - q_n)^2 - (q_n - q_{n-1})^2] \tag{5.1}$$

einen Übergang von Auslenkungen q_n diskreter Teilchen zu kontinuierlichen Auslenkungen q(x). Dieser führte nach einiger Rechnung zur KdV-Gleichung

$$u_\tau + uu_\chi + u_{\chi\chi\chi} = 0\,. \tag{5.2}$$

KRUSKAL war schon im Winter 1953-54 von ULAM in Los Alamos von dem FPU-Pänomen unterrichtet worden [Kruskal 1978]; auch ZABUSKY hatte sich schon einige Jahre mit dem FPU-Phänomen beschäftigt und dazu veröffentlicht [Ulam 1965], [Ford 1992]. KRUSKAL vermutete einen Zusammenhang von Gleichung (5.1) mit der aus der Plasmaphysik bekannten KdV-Gleichung und er suchte danach. ZABUSKY berichtete [persönliche Mitteilungen], wie sie 1964 beide oft im Wohnzimmer von ZABUSKYs Haus an der Tafel an der Lösung des FPU-Phänomens arbeiteten und KRUSKAL versuchte, das FPU-Problem so anzunähern, daß eben die KdV-Gleichung als Kontinuum-Limit herauskam. Das gelang ihm schließlich auch.

Da die KdV-Gleichung relativ einfach aussieht, strebten KRUSKAL und ZABUSKY ihre Integration an. Sie versuchten es numerisch. Und diese numerische Integration der KdV-Gleichung führte sie zu nicht minderen Überraschungen als es FERMIs "little discovery" selbst war. Unter periodischen Randbedingungen führte eine cosinus-Periode als Anfangsbedingung zu einem Aufbrechen des cosinus-Bogens in acht Wellenberge, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Amplitude abhing.

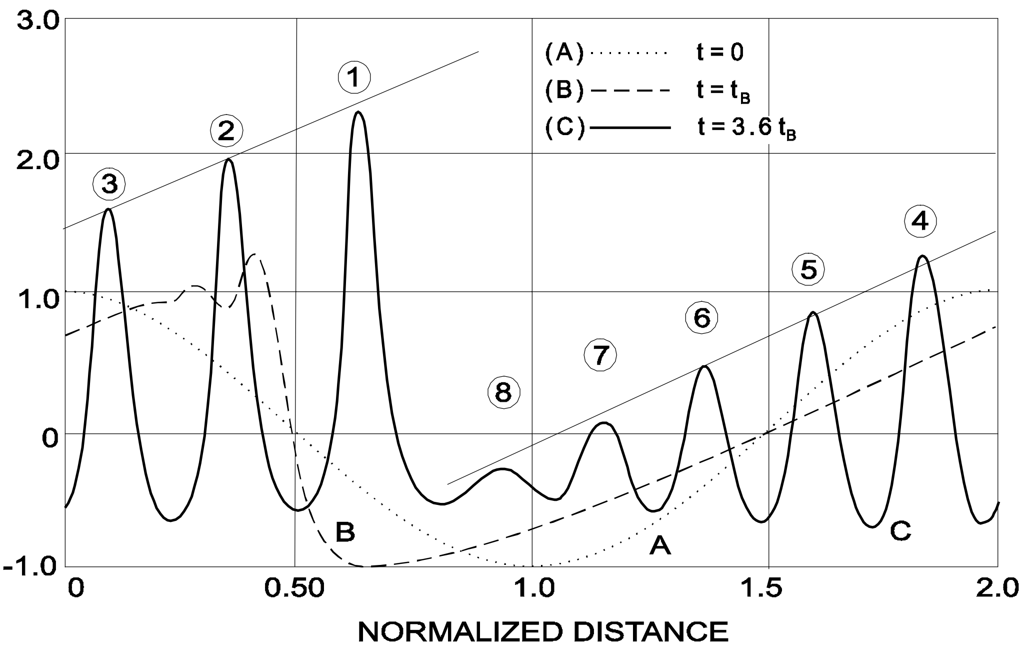

Abbildung 5.2:
Die numerisch integrierte Lösung der KdV-Gleichung von KRUSKAL und ZABUSKY; aus [Zab., Kru 1965]. Die gepunktete Linie bezeichnet den Anfangszustand, die gestrichelte die Entwicklung nach einer gewissen Zeit und die durchgezogene zu einem noch späteren Zeitpunkt. Die Wellengeschwindigkeit ist proportional zur Wellenhöhe, d.h. die großen Wellen "überholen" die kleinen.

Diese Wellenberge durchdrangen sich zwar, wie es die Nichtlinearität der KdV-Gleichung verlangte, sie verließen den Kollisionsort allerdings völlig ungestört. Ferner überlagerten sich alle Wellen nach einer Weile wieder fast zu ihrem Ausgangszustand, der Kosinusfunktion.

Zur Verdeutlichung der außergewöhnlichen Kollisionseigenschaften bannten KRUSKAL und ZABUSKY ihre numerischen Ergebnisse auf Zelluloid, indem sie den Bildschirm abfilmten. So konnten ihre Ergebnisse eindrucksvoll dargestellt werden. ZABUSKY bemerkte hierzu [Zabusky 1995, S. 159]:

> "Our numerical simulation results were visualized by Gary Deem and myself in a cinema, the first for a nonlinear partial differential equation [DKZ 1965]. ... This work came about through the effective collaboration of Kruskal (*asymptotologist*) at the Princeton Plasma Physics Laboratory and Deem (*computationalist*) and myself (`*visiometricist*′) at Bell Telephone Laboratories in Whippany, New Jersey."

Nach der vielbeachteten numerisch-experimentellen Entdeckung der Solitonen durch KRUSKAL und ZABUSKY beschleunigte sich der Takt der Entdeckungen innerhalb der Entwicklungslinie erheblich. Nun war allerdings nicht mehr FERMIs "little discovery" das Forschungsobjekt, sondern die von KRUSKAL und ZABUSKY so getauften *Solitonen* [Zab., Kru. 1965] und die KdV-Gleichung. Es stellte sich die Frage, ob die KdV-Gleichung integrabel in irgendeinem Sinne sei. Der Zusammenhang der KdV-Gleichung mit der Gasdynamik brachte KRUSKAL und ZABUSKY darauf, daß Erhaltungssätze der Form $T_t + X_x = 0$ in dieser Frage eine Antwort geben könnten. Hierbei stellt T die erhaltene Dichte dar und -X den dazugehörigen Fluß. Erhaltungssätze "verhindern Chaos" und erlauben z.B. durch Schockwellen hindurchrechnen zu können [Newell 1985]. Die ersten beiden - für Masse und Impuls und für die Energie - waren bekannt. WHITHAM hatte einen dritten gefunden, der Boussinesqs Stabilitätsmoment (siehe [Artikel I]) entsprach. KRUSKAL und ZABUSKY fanden weitere Erhaltungssätze. Diesen Prozess beschreiben MIURA [Miura 1976] und Newell [Newell 1985, S. 9]. Letzterer sei zitiert:

> "The next surge of momentum came with the arrival of Robert Miura who was asked by Kruskal to get his feet wet by searching for a conservation law at level seven. He found one and then quickly filled in the missing level six. Eight and nine fell quickly and Kruskal and Miura were certain that there was an infinite number. However, rumours originated from the Courant Institute that nine was the limit. ... Miura was therefore challenged to find the tenth. He did during a two week vacation in Canada in the summer of 1966. (There is also a rumour that he was seen about this time in Mt. Sinai, carrying all ten.)"

Bald wurde von KRUSKAL und MIURA, und von GARDNER gleichzeitig der Beweis für die Existenz unendlich vieler Erhaltungssätze erbracht [Miura 1976, S. 422]:

> "While working late at afternoon, Martin Kruskal and the author found a proof for the existence of an infinite number of conservation laws using the WKB formalism. As we examined our result, Clifford Gardner called from his home and told us he had just obtained an existence proof - a different one!"

Die vielen Erhaltungssätze machten nun allerdings die Geschichte unübersichtlich und wurden an diesem Punkt nicht weiter verfolgt. Es war vielmehr wieder MIURA, der neuen Schwung mit der Entdeckung der modifizierten Korteweg-de Vries-Gleichung (mKdV-Gleichung) brachte,

$$v_t + v^2 v_x + u_{xxx} = 0 , \qquad (5.3)$$

einer Gleichung, die ebenfalls viele Erhaltungssätze zuließ und, wie später gefunden wurde, auch eine Solitonengleichung ist. Die heute nach MIURA benannte Transformation

$$u = v^2 + v_x \qquad (5.4)$$

vermittelt zwischen der KdV-Gleichung (5.2) und der mKdV-Gleichung (5.3). Diese Transformation ist eine Riccati-Gleichung für v, in der t nun nur noch ein Parameter ist. Mit der Substitution

$$v = (\ln\psi)_x \quad bzw. \quad v = \frac{\psi_x}{\psi} \tag{5.5}$$

und der Galileiinvarianz der KdV-Gleichung wird die Miuratransformation (5.4) zur zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung:

$$\psi_{xx} - (u-\lambda)\psi = 0 .$$

Das heißt, daß die zwischen KdV-Gleichung und mKdV-Gleichung vermittelnde Transformation mit der Schrödinger-Gleichung zusammenhängt. Obwohl weder ψ, noch λ, geschweige denn das Potential u, die Lösung der KdV-Gleichung, bekannt waren, machte dieser Zusammenhang die Sache sicherlich noch spannender, als sie sowieso schon war. CLIFFORD GARDNER und JOHN GREEN waren mittlerweile zu KRUSKAL und MIURA hinzugestoßen und allen vieren gelang die Lösung des Problems durch die Ausarbeitung der IST [GGKM 1967]. Schon kurz darauf, im Jahre 1968, formulierte LAX einen Beitrag zur Verallgemeinerung der inversen Streumethode für andere Gleichungen der Form $u_t = K(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$ [Lax 1968]. Danach beruht die Durchführung einer inversen Streumethode auf der Möglichkeit, zwei Operatoren $L = L(\partial/\partial x1, u, u_x, \ldots)$ und $A = A(\partial/\partial x2, u, \ldots)$ zu finden, die durch die Relation $L_t = [A,L]$ miteinander verknüpft sind. Die Operatoren L, A werden heute *Lax-Paar* genannt.

Nach LAX dauerte es eine Weile, bis in der Theorie der Integration nichtlinearer partieller Differentialgleichungen weitere Fortschritte erzielt wurden.

> "There was a great quietness after the 67 paper. And the integration of the KdV equation was thought to be a great exception."

So beschrieb DAVID KAUP die Jahre nach 1967 [persönliche Mitteilungen]. Es wurde vermutet, daß die Integration der KdV-Gleichung ein Einzelfall war, eine Singularität, ähnlich der Integration der Burgers-Gleichung durch die Cole-Hopf-Transformation. Doch diese Ansicht wurde 1971 durch ZAKHAROV und SHABAT [Zak., Sha. 1971] in Frage gestellt, denen es gelungen war, die IST auf die Nichtlineare Schrödingergleichung zu erweitern. Das ließ vermuten, daß es weitere integrable Evolutionsgleichungen geben könnte. Im Jahre 1972 fand in Potsdam, New York, eine Tagung über die mittlerweile bedeutend gewordenen besonderen nichtlinearen Wellen statt, auf der HARVEY SEGUR die Arbeit von ZAKHAROV und SHABAT vorstellte. KAUP erinnerte sich [persönliche Mitteilungen], daß vermutet wurde, auch die SG-Gleichung wäre mit der IST behandelbar. Die Frage war nur: wie? Das Ziel, eine allgemeine Lösungsmethode für bestimmte nichtlineare Differentialgleichungen zu erhalten, brachte MARK ABLOWITZ, DAVID KAUP, ALAN NEWELL und HARVEY SEGUR zu einer Zusammenarbeit. In einem gemeinsamen Seminar wurden Ansätze für Lösungsmöglichkeiten der SG-Gleichung und anderer Gleichungen vorgetragen. WADATIs Lösung der mKdV-Gleichung [Wadati 1972] wirkte beflügelnd auf die Arbeit. Als 1973 die SG-Gleichung als "4. Ausnahme" mit Hilfe der IST integriert werden konnte [AKNS 1973a], zeichnete sich eine Tendenz ab, die Anlaß zu der Vermutung gab, daß es eine ganze Klasse integrabler nichtlinearer Evolutionsgleichungen geben konnte. Noch im Jahre 1973 gelang es den Vieren, dies mit der heute nach ihnen benannten AKNS-Methode zu beweisen [AKNS 1973b, 1974]. Nach diesen Veröffentlichungen war die Reaktion zuerst eher verhalten, bevor die Arbeiten fünf bis zehn Jahre später ein "citation classic" wurden.

Die SG-Gleichung wurde zur gleichen Zeit unabhängig von LAMB [Lamb 1971], sowie von CAUDREY, GIBBON, EILBECK und BULLOUGH [CGEB 1973a, b] integriert und kurz darauf von FADDEEV und TAKHTADZHYAN [Newell 1985]. Viele neue und anspruchsvollere Probleme wurden nun angegangen. Und manche Entdeckungen stellten sich "nur" als Wiederentdeckungen schon älterer Arbeiten heraus, wie z.B. der von BURCHNALL und CHAUNDY [Bur., Cha. 1922, 1928, 1929].

5.3 Die Ausbreitung der Solitonentheorie

Das rasche Wachstum der Solitonentheorie in den 60er und vor allem in den 70er Jahren, der Beginn ihrer klassischen Geschichte, wird bei Beschreibungen der Entstehung der Solitonentheorie häufig als Folge der Entdeckungen aus der jüngsten der in diesem Artikel und beschriebenen Entwicklungslinien (siehe obiges Kapitel) dargestellt: Es entsteht das Bild einer Solitonentheorie, die durch die Entdeckung der Kollisionseigenschaften der Lösungen der KdV-Gleichung und der Entdeckung der IST ihre Ausbreitung erfuhr. Hat man jedoch die gesamte frühe Geschichte der Solitonentheorie im Blick, so kann festgestellt werden, daß Solitoneneigenschaften auch schon früher an der SG-Gleichung studiert worden waren. Die Frage liegt nahe, warum die Solitonentheorie nicht schon durch die Entdeckungen an der SG-Gleichung ihre Ausbreitung erfuhr.

Wenn aus der heutigen Zeit zurückblickend die Geschichte der "Wiederentdeckungen" und Integration der beiden historisch bedeutendsten Solitonengleichungen - der KdV-Gleichung und der SG-Gleichung - verglichen wird, können einige Parallelen gefunden werden. Beide Wiederentdeckungen sind durch ähnliche physikalische Modelle angeregt worden: durch die Modelle eindimensionaler, diskreter Masseverteilungen. Beim FPU-Modell waren die Massen neben der linearen Kopplung durch eine quadratische Kraft verbunden (s. Gleichung 5.1). Die Kontinuisierung dieses Problems führte zur KdV-Gleichung. Beim Frenkel-Kontorova-Modell war der linearen Kopplung eine periodische Kraft überlagert (s. Gleichung 4.3). Die Kontinuisierung dieses Modells führte zur SG-Gleichung. Mit dem Kontinuumslimit des Frenkel-Kontorova-Modells war eine physikalische Anwendung einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung gefunden worden. Eine einzelne Lösung der SG-Gleichung war durch FRENKEL und KONTOROVA bekannt gemacht worden, - die Integration der SG-Gleichung war vor 1950 noch zu leisten. (Die Lösungen von BOUR waren unbekannt geblieben.) Ähnlich war der Stand um die KdV-Gleichung zu jener Zeit. Eine Anwendungsmöglichkeit in der Hydrodynamik sowie eine spezielle Lösung waren durch KORTEWEG und DE VRIES bekannt. Auch das Abtasten der Gleichungen in diesem Jahrhundert auf ihre Integrabilität hin verlief bei beiden Gleichungen ähnlich, nämlich durch die Anwendung störungstheoretischer Methoden. Die Lösung des Anfangswertproblems war SEEGER gut möglich, weshalb er folgerte, daß es exakte Lösungen der SG-Gleichung geben konnte und er suchte danach. Was die KdV-

Gleichung betrifft, so war 1963 von JACKSON durch einen störungstheoretischen Ansatz gezeigt worden, daß das FPU-System nicht weit von einem integrablen System entfernt sein konnte. Es war zu vermuten, daß das auch für dessen Kontinuisierung - die KdV-Gleichung - galt.

So können sich für den heutigen Betrachter die Entwicklungen um diese beiden Solitonengleichungen in den Fünfzigern und Sechzigern dieses Jahrhunderts als eine Art Wettlauf darstellen: Welcher Gleichung würde es gelingen, als erster den Schleier, der noch um die Solitonentheorie lag, zu lüften? Mit der Auffindung der Auto-Bäcklundtransformation der SG-Gleichung durch SEEGER und der damit verbundenen Lösungserzeugung durch BIANCHIs Superpositionsprinzip schien die SG-Gleichung diesen Wettlauf gewinnen zu können. Jedenfalls lag sie weit vorne. Anwendung und Integration waren von SEEGER in Verbindung gebracht worden, der außerdem die weitreichende Bedeutung dieser Verbindung erkannte. Durch die numerischen Simulationen SKYRMEs aus dem Jahre 1962 wurde der "Vorsprung" der SG-Gleichung noch ausgebaut. Trotzdem gelang es weder SEEGER noch SKYRME, genügend Mathematiker und Physiker von ihren Entdeckungen zu überzeugen. Daß dies später mit den Entdeckungen um die KdV-Gleichung anderen Wissenschaftlern gelang, ist einerseits den veränderten Umstände in der Mitte der sechziger Jahre zurückzuführen, in die die Wiederaufnahme der KdV-Gleichung fiel. Während 1953 - in der Zeit, in die die Veröffentlichung der bekannten Arbeit [SDK 1953] fiel - Anwendungen nichtlinearer Gleichungen weniger häufig waren und kaum miteinander in Verbindung gebracht werden konnten, hatten sie 1967 - zur Zeit der Entdeckung der IST - schon Einzug in manche Gebiete der Physik gehalten. Die Anwendung einer nichtlinearen Gleichung war keine "Singularität" mehr, wie es noch 1953 der Fall zu sein schien. Die Zeit war reifer für nichtlineare Gleichungen in der Physik, weshalb deren Integration mehr Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Als ein zweiter Aspekt, der die KdV-Gleichung begünstigte, wurde von MEINEL, NEUGEBAUER und STEUDEL in ihrem Buch "Solitonen" [MNS 1991] die Verbindung zwischen der KdV-Gleichung und der wohlbekannten eindimensionalen Schrödinger-Gleichung hervorgehoben. Dieser Umstand war eine treibende Kraft und hat sicherlich mit dazu geführt, daß der IST in den sechziger oder Anfang der siebziger Jahre mehr Beachtung geschenkt wurde als der Bäcklundtransformation. Beide Integrationsmethoden wurden im gleichen Jahr - 1967 - der an nichtlinearen Problemen arbeitenden scientific community vorgestellt: die Bäcklundtransformation durch [Lamb 1967] im August und die IST durch [GGKM 1967] im September. Im Jahre 1971, also noch vor der Integration der SG-Gleichung durch die IST, wurde die große Bedeutung der SG-Gleichung als Modell für viele Anwendungen in der Physik in einem Übersichtsartikel [BEMS 1971] dargestellt. Auch auf die Methode der BT wurde hingewiesen, die durch eine weitere Arbeit von LAMB bekannt geworden war [Lamb 1971]. Die SG-Gleichung war zu dieser Zeit der KdV-Gleichung, was die Anwendung in der Physik anging, weit voraus. Trotzdem wurde die aus Sicht der Handhabbarkeit "zu ihr gehörende" Integrationsmethode - die Bäcklundtransformation - nicht weiter beachtet. Anstelle dessen wurde die Integration der SG-Gleichung durch die IST zwei Jahre später gefeiert. Auch wenn die IST das Anfangswertproblem löst und nicht "nur" eine unendliche Hierarchie von Lösungen erzeugt wie die Bäcklundtransformation, ist es doch verwunderlich, daß der Bäcklundtransformation anfangs so wenig Aufmerksamkeit geschenkt wurde, denn die IST ist für die SG-Gleichung im Gegensatz zur Bäcklundtransformation recht umständlich. Die BT und damit die geometrische Interpretation der Solitonengleichungen wurde seitens der Mathematik zunächst vernachlässigt. So kam es, daß die Verbindung der Entwicklungslinie aus der Differentialgeometrie mit den übrigen Gebieten der Solitonentheorie nicht durch SEEGER zustande kam, sondern erst später durch Arbeiten von z.B. LAMB [Lamb 1971], HERMANN [Hermann 1976], LUND [Lund 1978] und SASAKI [Sasaki 1979] allmählich erfolgte. In den 70er Jahren erregte die Solitonentheorie nun allgemeines, internationales Interesse. Mit dem Eintrag in den Subject Index der Physics Abstracts wurde die Existenz der Solitonentheorie 1973 unter diesem Namen auch formell bestätigt. Es setzte bald ein "Solitonen-Boom" ein, in dessen Folge tausende Arbeiten zur Solitonentheorie entstanden. Der Frage, zu welchem Zeitpunkt das Interesse an Solitonen und den damit zusammenhängenden Phänomenen erwachte, gingen drei Arbeiten nach (s. Abb. 5.1).

Das Ergebnis fügt sich in das oben beschriebene Bild ein. Nachdem in den Sechzigern einige Abhandlungen aus der Mathematischen und Theoretischen Physik neue Entdeckungen vorstellten, wuchs nach einer kurzen Verzögerung die Zahl der Arbeiten zur Solitonentheorie. Kurz darauf begann ein Boom und die Zahl der physikalischen Arbeiten zur Solitonentheorie begann, die mathematischen zu überflügeln.

5.4 Periodisierung der Geschichte der Solitonentheorie

Das in dieser Arbeit und [Artikel III] gezeichnete Bild von der Entstehung der Disziplin *Solitonentheorie* läßt eine feinere Periodisierung der Geschichte der Solitonentheorie zu, als dies in der Einleitung geschehen ist. Hier kann vor allem der Übergang von der frühen zur klassischen Periode genauer untersucht werden. Dieser Übergang ist nicht scharf, sondern nimmt selber eine gewisse Zeit in Anspruch. Als eine feinere Periodisierung der Geschichte der Solitonentheorie wird hier folgende Gliederung vorgeschlagen[2]:

1. Frühe Geschichte:
   Übergangsphase: a.Vorbereitungsphase; b. Konstituierungsphase
2. Klassische Geschichte
   Übergangsphase
3. Moderne Geschichte.

Es zeigt sich, daß bestimmte Aspekte der Entwicklung der Disziplin Solitonentheorie durch diese Periodisierung verdeutlicht werden können. Im Einzelnen:

1. In der frühen Geschichte der Solitonentheorie verliefen einzelne Entwicklungslinien getrennt voneinander (siehe Diagramm in der Einleitung). In diesen Entwicklungslinien wurden einzelne Aspekte der Solitonen bzw. der Solitonentheorie entwickelt. In der Hydrodynamik ist es die dispersionslose solitäre Welle. In der Differentialgeometrie ist es die geometrische Interpretation einer Solitonengleichung bzw. deren Integration. In der Entwicklungslinie der Festkörperphysik bis 1950 ist es wieder die solitäre Welle. Nach 1950 trat eine grundlegende Änderung in dieser Entwicklungslinie ein: Erstmals wurden die beiden Aspekte *solitäre Welle* und *Integrabilität* von SEEGER vereint (die geometrische Interpretation stand eher im Hintergrund), indem er auch zwei Entwicklungslinien miteinander verband. Im Zuge dieser

[2] Der hier gemachte Vorschlag einer Periodisierung lehnt sich an Gedanken von MARTIN GUNTAU [Guntau 1982] an.

Verbindung wurde ein weiterer und entscheidender Aspekt der Solitonen entdeckt: ihre Kollisionseigenschaften. Diese Synthese aller für die Solitonentheorie wichtigen Aspekte kann betrachtet werden als Beginn der

Übergangsphase, genauer: Beginn der

a. Vorbereitungsphase. In dieser Phase wird der Beginn der klassischen Geschichte vorbereitet. Zu ihr können alle Entwicklungen gerechnet werden, die die grundlegenden Eigenschaften der Solitonen, bzw. ihrer Gleichungen aufzeigen. Hierzu zählt die Entdeckung der vielen Anwendungen der Solitonengleichungen, die deren Eigenschaften auf experimentellem Wege verdeutlichten, und insbesondere die Arbeiten von ZABUSKY und KRUSKAL. Durch ihre numerische Integration der KdV-Gleichung gelangten sie - wie SEEGER - zu dem Aspekt der Kollisionseigenschaften. Auch die Entdeckung der IST für die KdV-Gleichung im Jahre 1967 ist in diese Phase zu rechnen. Der grundlegende Unterschied aus der Sicht der Periodisierung zwischen der Entdeckung der Integrabilität der SG-Gleichung im vergangenem Jahrhundert und der Integrabilität der KdV-Gleichung 1967 besteht darin, daß 1967 der Aspekt der Integrabilität mit dem der solitären Welle in Verbindung gebracht werden konnte, was in der frühen Periode der Solitonentheorie noch nicht der Fall war.

Die Entwicklung von der Vorbereitungsphase in die

b. Konstituierungsphase, in der sich die klassische Geschichte konstituiert, ist nicht in einem scharfen zeitlichen Punkt einer Entdeckung zu fassen. In der Konstituierungsphase verwuchsen die einzelnen Entwicklunslinien einerseits und die Entdeckungen der Anwendbarkeit von Solitonengleichungen in den verschiedensten Gebieten der Naturwissenschaften andererseits zu einem relativ geschlossenen System. Der Beginn der Konstituierungsphase kann in den Zeitraum gelegt werden, in dem die Zusammengehörigkeit der verschiedenen Solitonengleichungen geahnt wurde, also in den Anfang der siebziger Jahre. Die Entdeckung der AKNS-Methode, die die Solitonengleichungen in eine Klasse zusammenfassen konnte, und der Eintrag der neuen Disziplin in den Subject Index der Physics Abstracts mit dem Namen "Solitonentheorie" gehören sicherlich in die Phase der Konstituierung der Disziplin. Die verschiedenen Entdeckungen zur Solitonentheorie wurden nun nicht mehr getrennt voneinander nach Gleichungen oder wissenschaftlicher Richtung behandelt, sondern konnten alle in einer Disziplin zusammengefaßt werden.

Damit trat die Solitonentheorie in die Phase der *normalen Wissenschaft* ein wie T. KUHN es nennt, bzw. in

2. die klassische Geschichte, wie es in dieser Arbeit bezeichnet wird. Die frühe Geschichte der Solitonentheorie und die Übergangsphase waren beendet.